



THÉORIE DE LA MULTIPLICATION ET DE LA TRANSFORMATION

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Gand, imp. C. Annoot-Braeckman.

THÉORIE

DE LA

MULTIPLICATION ET DE LA TRANSFORMATION

DES

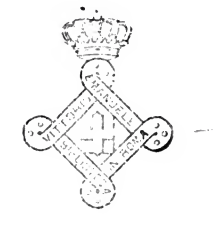
FONCTIONS ELLIPTIQUES.

ESSAI D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE,

PAR

PAUL MANSION,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE DES SCIENCES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, CHARGÉ DU COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE
A L'UNIVERSITÉ DE GAND.



PARIS,
LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des grands Augustins, 55.

GAND,
LIBRAIRIE DE H. HOSTE,
rue des Champs, 45.

1870.

PRÉFACE.

> *Utilitas functionum ellipticarum*, iis, qui, dum veritatum aeternarum sublimitatem atque divinam venustatem non sapiunt, earum pretium ex solo usu qui inde in partes matheseos applicatae redundare potest aestimare noverunt, hasce investigationes cariores reddat ! GAUSS.

Depuis les premiers travaux d'ABEL et de JACOBI sur les fonctions elliptiques, la théorie de ces transcendantes a donné lieu aux recherches les plus variées et les plus fécondes. Dans le premier mémoire d'ABEL se trouvent signalées pour la première fois la double périodicité de ces fonctions, et la relation intime qui existe entr'elles et les produits infinis, appelés aujourd'hui fonctions θ par les géomètres. Ces deux idées fondamentales ont été le point de départ de deux méthodes très distinctes au moyen desquelles on a abordé les parties les plus difficiles de la théorie des nouvelles fonctions.

JACOBI, avec son génie créateur, approfondit avec soin la nature de ces produits infinis, entrevus autrefois par CAUCHY et POISSON; il arriva ainsi aux conclusions les plus inattendues, non seulement sur les fonctions elliptiques, mais encore sur la théorie des nombres. HERMITE en France, CAYLEY en Angleterre parvinrent aussi à d'importants résultats dans cette voie. Enfin l'étude des séries analogues à celles qui naissent

de la considération des fonctions θ, conduisit Göpel, Rosenhain et Weierstrass à l'inversion des intégrales Abéliennes.

D'autres géomètres à la tête desquels il faut citer Abel, et Jacobi lui-même dans ses premières recherches, se servirent au contraire de la double périodicité comme moyen principal d'étude des fonctions elliptiques. C'est en s'appuyant sur cette propriété qu'Abel donna la solution du problème de la multiplication, de la division et de la transformation; c'est aussi cette propriété, qui est, quoiqu'on en ait dit, et malgré la forme purement algébrique des déductions, le fond de la méthode de Jacobi dans la première partie des *Fundamenta*. Plus tard, les travaux de Cauchy, de Liouville, de Puiseux, de Briot et Bouquet sur les intégrales à variable imaginaire créèrent une théorie générale des fonctions doublement périodiques. On put alors pénétrer au fond de l'idée, jusqu'alors un peu obscure, de la double périodicité, et en déduire avec une grande simplicité les propriétés trouvées par Abel et Jacobi, et d'autres qui leur avaient échappé. Enfin ces belles spéculations sur les fonctions encore généralisées donnèrent à Riemann le moyen de traiter, d'une manière toute nouvelle, l'inversion des intégrales abéliennes.

Le problème de la transformation, qui forme le point culminant de la théorie des fonctions elliptiques, ne pouvait manquer d'être étudié tant au moyen de la théorie des fonctions θ, qu'au moyen de la théorie des fonctions doublement périodiques. La première méthode a été suivie par Königsberger dans un ouvrage récent où la question est traitée d'une manière complète. Briot et Bouquet emploient la seconde dans l'esquisse rapide qui termine la partie théorique de leur ouvrage sur les fonctions elliptiques. Ces solutions du problème de la transformation sont toutes deux très simples, surtout la dernière; mais elle supposent connues l'une et l'autre un long enchainement de propositions préliminaires. D'autre part, les solutions plus élémen-

taires de Jacobi et d'Abel sont incomplètes sur un point essentiel, le rapport qui existe entre les périodes de la fonction transformée et celles de la fonction primitive; il en résulte qu'ils ne peuvent trouver le signe des constantes, ni démontrer que le nombre qui caractérise la transformation est positif.

Dans le présent mémoire, nous essayons de donner par une méthode nouvelle, une exposition des formules fondamentales de la transformation, aussi simple et aussi complète que celle que l'on pourrait déduire de la théorie des fonctions doublement périodiques, aussi élémentaire que celles de Jacobi et d'Abel. Cette méthode a pour procédé fondamental de recherche le théorème connu de calcul différentiel sur la vraie valeur des fonctions qui prennent la forme $\frac{0}{0}$.

C'est ce principe qui nous fournit *à priori* le degré de multiplicité des facteurs qui entrent dans les formules de la transformation, ce que l'on ne trouve par aucune autre méthode; c'est aussi ce principe qui nous sert à démontrer *à posteriori*, l'exactitude des formules trouvées en supposant le problème possible; et cette vérification se fait avec la même facilité, soit dans les cas traités par Abel et Jacobi, soit dans ceux auxquels d'autres géomètres ont vainement tenté d'étendre d'une manière rigoureuse les méthodes suivies par ces grands analystes. Nous fesons aussi largement usage du même principe dans la recherche des constantes; c'est d'ailleurs le seul procédé qui puisse réussir quand on ne s'appuye pas sur la théorie des fonctions θ, et il a été employé par Abel dès 1827, pour trouver les constantes dans la question de la multiplication. La détermination exacte du signe des constantes nous donne le moyen de démontrer le théorème remarquable dont nous parlions plus haut sur le signe du nombre caractéristique de la transformation, théorème qui n'a encore été obtenu que par la théorie des fonctions θ.

Nous fesons précéder la théorie de la transformation de celle de la multiplication, à laquelle notre méthode s'applique de la manière la plus naturelle; même dans cette question élémentaire, nous avons trouvé à glaner encore, grâce à l'emploi du procédé qui est la base de cet opuscule. Nous signalons particulièrement à l'attention du lecteur la manière simple dont nous arrivons à la valeur des produits constants qui se présentent dans cette théorie.

Le mémoire est précédé d'une introduction historique. Nous y fesons connaître les progrès de la théorie des fractions elliptiques, dans ses rapports avec la multiplication et la transformation, avant la découverte de la double périodicité; puis nous indiquons les solutions diverses de ces problèmes que l'on a déduites de cette propriété. Dans les notes nous donnons quelques renseignements bibliographiques sur divers points qui se rattachent plus ou moins aux questions traitées dans cet opuscule.

Puisse cet essai contribuer à faire connaître une théorie dont Gauss signalait déjà, il y a un demi-siècle, la haute importance pour ceux qui s'occupent d'astronomie et de physique mathématique!

INTRODUCTION HISTORIQUE.

Nous fesons connaitre dans cette introduction, les diverses méthodes employées pour arriver aux formules fondamentales de la multiplication et de la transformation; nous nous bornons toutefois à celles qui présentent de l'analogie avec celle qui a été suivie dans notre mémoire. En outre, nous donnons une idée des travaux sur les fonctions elliptiques avant Abel et Jacobi, afin de mieux faire ressortir la grandeur des difficultés qu'ils ont surmontées et le mérite de leurs découvertes; nous ajoutons aussi quelques notes bibliographiques sur divers points plus ou moins étroitement liés à la théorie de la multiplication et de la transformation (1).

---

(1) Montucla parle très peu de la théorie des fonctions elliptiques, parce qu'il ne se doute pas de l'importance de cette théorie; il nous a peu servi pour la rédaction de cette notice. L'introduction du traité de Legendre et les notes bibliographiques de Lacroix dans son calcul différentiel et intégral, nous ont été, au contraire, très utiles pour l'histoire des fonctions elliptiques jusqu'en 1825. A partir de cette époque, nous n'avions plus de guide, et nous avons dû recourir aux recueils des académies et aux journaux de mathématiques; toutefois l'éloge de Jacobi par Lejeune-Dirichlet (*Mém. de Berlin*, 1852; *Journal de Liouville*, 1857; *Journal de Crelle*, t. 52) nous a fourni quelques indications précieuses sur le mérite respectif des géomètres qui ont le plus fait avancer cette branche importante de l'analyse.

Les notations dont nous nous servons dans cette introduction sont celles qui sont indiquées en tête de notre mémoire.

CHAPITRE PREMIER.

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES AVANT LA DÉCOUVERTE DE LA DOUBLE PÉRIODICITÉ (1).

1. JEAN BERNOULLI (1667-1748). Les premiers géomètres qui s'occupèrent de calcul intégral appliquèrent ce puissant instrument à la quadrature et à la rectification des courbes. Jean Bernoulli compara les arcs de parabole dont le nouveau calcul avait donné la longueur au moyen de l'aire de l'hyperbole (c'est à dire des logarithmes(2)), et quant à l'ellipse et à l'hyperbole, il remarqua que leurs arcs ne pouvaient être exprimés qu'au moyen de séries infinies(3). C'est dans les écrits de ce grand géomètre que l'on trouve le premier germe de l'une des démonstrations les plus belles et les plus simples du théorème de l'addition des fonctions elliptiques. Il montre en effet, comment l'intégration par parties peut conduire, avec la plus grande facilité, à l'intégrale algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{a^2 \pm y^2}};$$

il indique les conséquences de cette propriété pour la multiplication et la division des espaces circulaires et hyperboliques, autrement dit, des fonctions trigonométriques et exponentielles, et ajoute que l'on peut probablement généraliser ces résultats(4). Il ne paraît pas toutefois qu'il soit parvenu aux propriétés analogues pour les intégrales elliptiques.

---

(1) Nous désignons avec Jacobi sous le nom de fonctions elliptiques les fonctions inverses des intégrales étudiées par Legendre. Les fonctions et les intégrales elliptiques ont des propriétés corrélatives comme les sinus et les arcs sinus. Dans ce paragraphe, nous traduisons la plupart des propriétés des intégrales elliptiques en propriétés correspondantes des fonctions elliptiques. Ce procédé ne donne pas une idée parfaitement exacte de la manière dont on considérait cette théorie au XVIIIe siècle, mais il fait mieux voir la marche ascendante de la science.

(2) *Acta eruditorum*, 1698; *Opera*, I, 242. Cf. LEIBNITII et JOH. BERNOULLII, *Commercium philosophicum et mathematicum* (Lausannae et Genevae, Bousquet, 1745), I, 166, 203, 352, etc.

(3) *Commerc.*, I, 15 et passim.

(4) *Commerc.*, I, p. 59-60. Comparez ce que nous disons ci-dessous de Lagrange.

2. FAGNANO(1) (1682-1766). Le premier « *un mathématicien italien doué d'une pénétration extraordinaire, le comte Fagnano,* » dit Lejeune-Dirichlet, parvint à des résultats remarquables dans le domaine de la théorie des fonctions elliptiques. En étudiant la lemniscate, il fut conduit à s'occuper de l'intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{\sqrt{1+Ay^4}} \pm \frac{dx}{\sqrt{1+Ax^4}} = 0 \qquad A = \pm 1.$$

Il découvrit plusieurs intégrales algébriques particulières de cette équation, ce qui revient à dire qu'il trouva quelques cas particuliers de l'addition des fonctions elliptiques de module $1/2$. Il en déduisit l'addition, la multiplication et la division des arcs de lemniscate par des équations algébriques. Il prouva ensuite que sur une ellipse ou une hyperbole on peut assigner, de diverses manières, deux arcs dont la différence est rectifiable; théorème connu sous le nom de *théorème de Fagnano,* beaucoup généralisé depuis, et qui est au fond un cas particulier de l'addition des intégrales elliptiques de seconde espèce. Enfin il ramena la rectification de la lemniscate à celle de l'ellipse et de l'hyperbole, résultat remarquable dont la raison est que l'arc de cette courbe s'exprime au moyen de la première intégrale elliptique seule, l'ellipse au moyen de la seconde et l'hyperbole au moyen des deux (2).

3. MACLAURIN (1698-1746), D'ALEMBERT (1717-1783), RICCATI (1707-1775). Maclaurin fut le premier après Fagnano qui entreprit de ramener des intégrales transcendantes aux arcs de sections coniques. Dans son traité des

(1) Poggendorf cite de lui : *Metodo per mesurare la lemniscata* (Giorn. de Lett., 1718), *Produzioni matematiche,* 1750. Montucla dit que ce dernier ouvrage se compose de mémoires insérés longtemps auparavant dans les actes de Leipzig et les journaux italiens. On a donc tort de citer parfois Maclaurin et d'Alembert comme s'étant occupés les premiers d'intégrales elliptiques. Les ouvrages de Fagnano sont introuvables; nous en parlons d'après Legendre, Montucla, Lejeune-Dirichlet et Plana. — C'est de Poggendorf que nous extrayons la date de la naissance et de la mort des géomètres qui se sont occupés de la théorie des fonctions elliptiques.

(2) Voir pour la démonstration ou l'extension du théorème de Fagnano : *Mémoires présentés par divers sav. ac. de Paris,* t. III (BEZOUT et BOSSUT); CAUCHY, *Applications du calcul infinitésimal,* leçon 23, ou MOIGNO *Calc. int.,* leç. 11 ; VERHULST, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* (Bruxelles, Hayez, 1841), § 53, p. 70; GRAVES, *Translation of Chasles 's Memoirs on cones and spherical conics,* p. 77; MACCULLAGH, *Dublin Exam. Papers,* 1841, p. 41; 1842, p. 68, 83; CHASLES, *Comptes-rendus,* XVII, p. 838; KÜPPER, *Crelle,* 63, p. 40; GILBERT, *Bulletins de l'Ac. de Bruxelles,* 2de série, t. 9, n° 1.

fluxions, par des transformations habiles dont il garde le secret, il effectue un certain nombre de ces réductions; il prouve, entre autres choses, que le temps, dans le mouvement du pendule, est donné par un arc d'ellipse, et que les arcs de sections coniques peuvent servir à construire l'ordonnée de certaines courbes dont on ne connaît que l'équation différentielle, comme la courbe élastique (1). D'Alembert montra le chemin qui avait probablement conduit Maclaurin aux réductions exposées dans son ouvrage, et en découvrit lui-même un grand nombre d'autres par une méthode plus systématique (2). Le P. Riccati étudia avec soin aussi quelques intégrales de ce genre (3). Mais, comme le fait remarquer Legendre, ces nombreuses intégrations n'étaient pas reliées par une règle générale qui permît de voir dans quels cas on pouvait être certain d'arriver à réduire l'intégrale donnée aux seuls arcs d'ellipse et d'hyperbole.

4. Euler (1707-1783). Euler, avec son esprit systématique, reprit, coordonna et compléta tous les travaux de ses devanciers. Il ramena un grand nombre d'intégrales aux arcs de sections coniques et exposa d'une manière plus simple les théorèmes connus antérieurement sur ces courbes et sur la lemniscate. Mais son principal mérite est d'avoir trouvé le théorème de l'addition des fonctions elliptiques. Ce furent les travaux de Fagnano qui le mirent sur la voie. Il découvrit d'abord l'intégrale générale de l'équation différentielle dont Fagnano n'avait donné que des solutions particulières; puis, considérant des cas de plus en plus compliqués, il parvint à l'intégrale générale algébrique de

$$\frac{dy}{fy} \pm \frac{dx}{fx} = 0 \qquad fx = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$$

(1) *Traité des Fluxions,* traduit par le P. Pezenas, jésuite (Paris, Jombert, 1749), t. II, n° 798 sqq., p. 225; n° 886, p. 282; n° 927 sqq., p. 313.

(2) *Mémoires de Berlin,* 1746, 1748; voir aussi *Misc. Soc. Taurin,* t. IV.

(3) V. Riccati, *S. J. opuscula* (Lucae, 1757-1772), t. II. — On peut rattacher à ces recherches de Maclaurin, D'Alembert, Riccati et à celles d'Euler, des recherches analogues, mais beaucoup plus approfondies, qui sont dispersées dans les recueils de Crelle et de Liouville, dans les archives de Grunert, les Philosophical transactions, les mémoires de l'Académie de St-Pétersbourg; mais les mémoires sur ce sujet sont tellement nombreux que nous devons renoncer à les faire connaître. Nous devons aussi laisser de côté, pour la même raison, les applications de la théorie des intégrales elliptiques à la géométrie de la mesure.

Il en déduisit le moyen de trouver celle de

$$\frac{dz}{fz} \pm \frac{ndx}{fx} = 0$$

n étant un nombre entier.

Pour simplifier l'exposition des conséquences de cette intégration il imagina la notation suivante :

$$\Pi\, x = \int \frac{dx}{fx}$$

l'intégrale étant prise depuis une valeur déterminée, zéro par exemple. Il pouvait ainsi représenter de deux manières distinctes les intégrales des équations précédentes, algébriquement ou bien au moyen des relations transcendantes :

$$\Pi\, y \pm \Pi\, x = C, \qquad \Pi\, z \pm n\, \Pi\, x = C.$$

Si Euler eut songé à regarder x comme fonction de Πx, il serait probablement arrivé à maints résultats trouvés soixante ans plus tard par Abel et Jacobi. Mais il n'effectua pas cette inversion des intégrales elliptiques; et par suite il ne parvint pas à trouver la valeur algébrique de z en x pour n quelconque : sa méthode ne lui donnait cette expression que par un calcul de proche en proche dont la loi semblait inextricable. Il pressentait toutefois toute l'importance de cette loi « *Cœterum cognitio hujus legis ad incrementum analyseos maxime esset optanda* » dit-il; « *hinc enim eximias proprietates circa integralia* Πz *cognoscere liceret, quibus scientia analytica haud mediocriter promoveretur* » (*Calc. int.*, n° 616). Il remarqua encore que les valeurs de z pour trois nombres consécutifs $n-1$, n, $n+1$ ont une relation assez simple, qui a servi à Abel dans sa solution du problème de la multiplication(1).

---

(1) Voir surtout *Nov. Com. Petrop.*, VI, p. 37-85; VII, p. 1-48, 83-162; VIII, p. 129-149; X, 1-50; *Calc. int.* (*Petrop.* 1768), sect. II, c. VI; *Act. Petr.* 1778, simplification de la démonstration de Lagrange du théorème de l'addition ; 1780, sur les intégrales qui se ramènent aux arcs de sections coniques. — Plana, *Mémoires de Turin*, 2de série, t. XX, p. 290, remarque que les mémoires d'Euler contiennent le théorème de l'addition pour les intégrales elliptiques de seconde et même de troisième espèce. Mais comme Euler n'a pas d'algorithme régulier pour les trois intégrales elliptiques distinguées par Legendre, les équations signalées par Plana n'ont pas dans Euler, la même importance que chez le géomètre français. — Une élégante exposition de la méthode d'Euler pour l'intégration de l'équation elliptique différentielle, due à Cauchy, se trouve dans le calcul intégral de Moigno, leçon 31, n° 192; au même endroit, voyez aussi la méthode de Richelot. — Lamé, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes*, leçon 4me donne aussi très simplement la méthode d'Euler ; conf. P. Mansion, *Revue de l'Instr. publ. de Belg.*, 1868, p. 393.

5. Landen (1719-1790). Peu après qu'Euler posait les bases de la solution du problème de la multiplication des fonctions elliptiques, Landen trouva la solution la plus simple de la transformation. Dans un premier mémoire (1) il exprima, au moyen d'un arc d'hyperbole, la limite de la différence entre un arc de cette courbe, compté depuis le sommet jusqu'à un point quelconque, et la tangente en ce point comptée jusqu'au pied de la perpendiculaire abaissée du centre, lorsque le point s'éloigne indéfiniment. La valeur de cette limite était supposée connue dans les travaux antérieurs de Maclaurin et de D'Alembert. Landen, au moyen de cette limite, trouva plusieurs résultats curieux, les uns touchant de près au théorème de Fagnano, les autres relatifs au mouvement du pendule, à la construction de la courbe élastique, etc. Mais dans toute cette partie de ses recherches, si on emploie les notations de Legendre, on reconnaît qu'il ne s'agit que de fonctions elliptiques de même module. Seulement, la fin du mémoire contient un théorème d'un genre tout nouveau, qui s'appuie non-seulement sur la connaissance de la limite dont nous avons parlé, mais sur une formule démontrée par Landen en 1768 (2) et qui, écrite avec les notations actuelles, est :

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$$

Ce théorème est le suivant : *on peut assigner sur une hyperbole équilatère un arc mesurable au moyen d'un arc d'ellipse et d'un arc de cercle.* Quatre ans plus tard, il arrivait par une méthode beaucoup plus simple, à un théorème général du même genre : *un arc d'hyperbole d'excentricité* e^{-1} *peut être mesuré par deux arcs d'ellipse d'excentrités liées par l'équation :*

$$e'=\frac{\sqrt{1\cdot e}}{\frac{1+e}{2}};$$

autrement dit : *on peut trouver une relation entre l'intégrale elliptique de seconde espèce de module* e', *et les intégrales elliptiques de première et*

(1) *Philosophical Transactions*, 1771, n° 36. *A disquisition concerning, etc.*, p. 298-309.

(2) Ibid., 1768, p. 174-180. *A specimen of a new method, etc.* — Il est remarquable que les eulériennes aient servi à trouver une relation dans la théorie des fonctions elliptiques. — Serret, *Journal de Liouville*, t. VII, s'occupe des rapports qui existent entre les eulériennes et les fonctions elliptiques.

de seconde espèce de module e (1). Lauden ne fit qu'un médiocre usage de sa belle découverte, faute d'un algorithme qui en fit voir l'importance. La réduction des arcs d'hyperbole aux arcs d'ellipse parut seulement curieuse, et Montucla crut qu'elle ne servirait en rien dans la pratique, parce que, dit-il, les séries qui servent au calcul de l'intégrale qui exprime l'arc d'ellipse sont quelquefois aussi peu convergentes que celles qui servent au calcul de l'arc d'hyperbole (2).

6. Lagrange (1736-1813). Le premier travail de Lagrange sur les fonctions elliptiques est un mémoire sur l'intégration de l'équation différentielle elliptique la plus générale. Il expose d'abord une méthode très simple d'intégration pour le cas où le radical porte sur une expression du second degré; cette méthode est identique à celle de Jean Bernoulli que nous avons signalée au commencement de cette introduction, mais Lagrange ne semble pas avoir eu connaissance de ce travail antérieur. Il donne ensuite la méthode d'Euler et enfin une méthode nouvelle qui conduit à l'intégrale par une marche systématique sans aucune devination (3). Cette belle analyse lui attira les éloges les plus flatteurs d'Euler qui exposa et simplifia le nouveau procédé. Dans la *Théorie des fonctions analytiques,* Lagrange revint sur le théorème de l'addition et découvrit une propriété remarquable des fonctions elliptiques, qui rattachent ce théorème à la trigonométrie sphérique. Cette propriété peut s'énoncer de la manière suivante : *Si on considère un triangle sphérique dont les côtés satisfassent à la relation* $Fx + Fy = Fz$, F désignant la

---

(1) *Philosophical transactions,* 1775, p. 285-290. Les auteurs citent aussi : *Mathematical Memoirs,* p. 23 (1780).

(2) La transformation de Landen a été souvent appelée à tort transformation de Lagrange, entre autres par Ivory. Ce dernier (*Ph. Tr.*, 1831); Verhulst, *Théorie, etc.*, § 121, p. 222; Baehr, *Archives de Grunert,* t. XXXIII, p. 337-369, s'occupent des relations qui existent entre la solution de Landen et celle de Jacobi. — Cette transformation est étudiée géométriquement par Jacobi, *Crelle,* 32, p. 176 ou *Werke,* B. I, p. 357; Küpper, *Crelle,* 55, p. 89. Enfin Richelot est parvenu à en déduire la théorie des fonctions θ. Voir son ouvrage : *Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen,* Königsberg, 1868, ou le *Traité élémentaire de Durège,* ch. XIII et XIV. — Abel a donné le premier la transformation de Landen au moyen de la double périodicité. *OEuvres,* I, XIII, p. 268.

(3) *Miscell. Taurin,* IV (1766-1769), p. 98; *OEuvres,* II, 5-33. — Despeyroux, *J. de Liouville,* 1856, p. 231, a étendu la première méthode de Lagrange, déjà trouvée par Bernoulli, aux fonctions elliptiques. La méthode d'intégration de Lagrange se trouve dans presque tous les traités de calcul intégral. V. Lacroix, II, p. 475, nº 692-696; Moigno, § 191 et les traités des fonctions elliptiques,

première intégrale elliptique de Legendre, le module de cette intégrale sera égal au rapport constant des sinus des côtés et des angles opposés. Lagrange déduisit de là une construction géométrique sur la sphère du problème de la multiplication (1).

Dans un autre mémoire, Lagrange s'occupa du calcul approché de toutes les intégrales de la forme $\int f(x,R)dx$, R désignant un radical carré portant sur une expression du quatrième degré, f une fonction rationnelle en x et R. Il montra d'abord comment ces intégrales pourraient se réduire à la forme :

$$\int \frac{Ndx}{\sqrt{(a+bx^2)(m+nx^2)}},$$

N désignant une fonction rationnelle de x^2. Ensuite par un procédé très simple, il prouva que l'on peut transformer cette expression en la suivante :

$$\int \frac{Pdy}{\sqrt{(1+py^2)(1+qy^2)}},$$

p pouvant être aussi petit que l'on veut, et q croître autant que l'on veut ou inversement. Le mémoire se termine par l'application de ce qui précède à la rectification approchée, dans tous les cas, des sections coniques. Ce mémoire, au fond, contient une solution du problème de la transformation pour les intégrales elliptiques, non seulement de seconde espèce, mais aussi pour celle de première et de troisième espèce, et la substitution de Lagrange est identique à celle de Landen. Mais l'auteur se préoccupe uniquement du calcul pratique des intégrales qui contiennent un radical carré portant sur une expression du 4me degré, au point qu'il ne remarque même pas, comme Landen, que l'arc d'hyperbole peut s'exprimer au moyen de deux arcs d'ellipse, quoique ce théorème et beaucoup d'autres soient contenus dans ses formules (2).

7. Legendre (1752-1833). « *C'est la gloire impérissable de Legendre d'avoir reconnu dans les découvertes que nous venons de rappeler le germe d'une branche importante de l'analyse* » (Lejeune-Dirichlet). Dès ses premiers travaux, il introduit un algorithme régulier pour représenter les

(1) *Théorie des fonctions analytiques* (2de édition, Paris, 1813), ch. XI, p. 110 sqq. Voir Lacroix, II, n° 709-710, p. 499 et les traités des fonctions elliptiques.

(2) *Mémoires de Turin*, I (1784-1785). *Œuvres* II, p. 253. Lacroix, II, n° 425-427, p. 77.

intégrales elliptiques. Comme Lagrange, sans connaître les travaux de Landen, il retrouve ce beau théorème que l'hyperbole peut être mesurée par deux ellipses, ou plutôt un théorème équivalent, et, mieux que Lagrange et Landen, il en voit la portée, non seulement pour le calcul numérique des intégrales, mais encore pour les progrès généraux de l'analyse. Dans le mémoire suivant, il reconnaît nettement que toutes les intégrales du genre de celles qui ont été considérées par Lagrange se ramènent à trois intégrales distinctes, pour lesquelles il propose les notations suivantes :

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\; d\varphi$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

k est appelé le module, n le paramètre. Les découvertes antérieures se classent dès lors en deux séries distinctes. Les recherches d'Euler, de Lagrange et de Legendre lui-même sur l'intégration de l'équation différentielle elliptique et sur ses conséquences, sont des théorèmes sur les fonctions F, E, Π de même module et de même paramètre ; celles de Landen, de Lagrange, et les siennes propres sur les rapports entre les arcs d'ellipse et d'hyperbole donnent des relations entre les fonctions F, E, Π, où l'on suppose différentes valeurs au module (1). Pendant quarante ans, Legendre continua ses recherches sur les intégrales elliptiques et les consigna dans ses *Exercices de calcul intégral* et dans son grand *Traité des fonctions elliptiques* (2). Il calcula des tables pour les fonctions des deux premières espèces

(1) *Mémoires de l'académie des sciences,* 1786, p. 616-644 ; 644 sqq. Il eut connaissance du mémoire de Landen après avoir composé la première partie de son travail. Dans ce premier essai, Legendre considère la fonction E et la fonction $\frac{dE}{dk}$ qui peut s'exprimer au moyen de E et F. — *Mémoire sur les transcendantes elliptiques,* 1793. Première esquisse du grand traité.

(2) *Exercices de calcul intégral* (Paris, Ve Courcier, 1811). *Traité des fonctions elliptiques.* 2 vol. Paris, Huzard Courcier, 1825, 1827. Le troisième volume parut plus tard, il contient trois suppléments consacrés aux recherches de Jacobi et d'Abel. La transformation de Legendre est exposée ch. 28-31 et additions. — En 1841, un belge, Verhulst, a résumé l'ouvrage de Legendre ainsi que quelques-unes des découvertes de Jacobi dans son *Traité élémentaire des fonctions elliptiques,* Bruxelles, Hayez, 1841. C'est le premier ouvrage où l'on ait essayé de mettre à la portée de tous, et les travaux de Legendre, et ceux de Jacobi. Le premier ouvrage analogue en Allemagne, date de 1861, sauf quelques essais dans les *Archives de Grunert.*

et montra par de nombreuses applications leur emploi dans l'analyse. En outre, dans la partie purement théorique, il arriva à un grand nombre de vérités nouvelles dont quelques-unes touchant les intégrales de troisième espèce « *sont d'un abord extrêmement difficile* » dit Lejeune Dirichlet. Cela provient de ce que Legendre comme tous ses devanciers considère seulement les intégrales elliptiques au lieu de leurs fonctions inverses et que, par suite, la double périodicité lui échappe. Malgré les inconvénients de sa méthode, en 1825, il fit une découverte sur la théorie de la transformation. Il trouva une nouvelle solution de ce problème de la forme

$$\sin \omega = \frac{\sin \varphi \,(m + h \sin^2 \varphi)}{1 + h \sin^2 \varphi},$$

c'est-à-dire du troisième degré en *sin* φ; m et h ont des valeurs déterminées en k et on a :

$$\frac{d\omega}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \omega}} = \frac{m d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

α et c étant aussi des fonctions connues de k. Cette découverte donnait des procédés nouveaux, en nombre infini, pour ainsi dire, pour calculer les tables de fonctions elliptiques. Legendre indiqua de suite le parti que l'on pouvait en tirer dans ce sens. La nouvelle solution de la transformation est exposée dans l'ouvrage de l'illustre vieillard d'une manière graduée, en passant des cas les plus simples aux cas les plus compliqués; cette méthode d'exposition lui semblait la meilleure et il exprima plus tard ses regrets à Abel et à Jacobi de ce qu'ils ne l'avaient pas suivie dans leurs mémoires. La découverte de Legendre ouvrait de nouveaux horizons aux analystes dans cette belle théorie des fonctions elliptiques, quand tout à coup, les découvertes de Jacobi et d'Abel vinrent la transformer complètement et en changer d'une manière inattendue les méthodes d'investigation. Mais, avant d'exposer ces recherches, nous devons dire un mot des travaux de Gauss pour rester fidèle à l'ordre chronologique.

8. Gauss (1777-1855). Les recherches de Gauss ont rapport, les unes aux fonctions elliptiques en général, les autres aux fonctions lemniscatiques, c'est à dire, aux fonctions elliptiques de module $1/2$. Dans un passage des *Disquisitiones*, Gauss déclare que la division de la lemniscate en parties égales dépend des mêmes principes que la division du cercle. Cette assertion, dont Abel a montré la pleine vérité, était naguère le seul passage connu de

Gauss sur les fonctions lemniscatiques. La publication de ses mémoires inédits a prouvé qu'il s'était longtemps occupé de ces fonctions, et particulièrement de leur multiplication et de leur division; et de l'ensemble de ces documents résulte que Gauss a bien connu leur double périodicité. Il les étudie surtout au moyen des séries et des produits infinis(1). Quant aux fonctions elliptiques générales, il les regarde le plus souvent comme nées de la considération de ce qu'il appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de deux nombres m et n. Soit la série indéfinie d'égalités :

$$m' = \frac{1}{2}(m+n), \qquad n' = \sqrt{mn},$$

$$m'' = \frac{1}{2}(m'+n'), \qquad n'' = \sqrt{m'n'},$$

$$\text{etc.}, \qquad\qquad \text{etc.},$$

les quantités m', m'', n', n'', convergeront vers une limite commune μ, (moyenne arithmético-géométrique) qui sera égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{m^2\cos^2 T \pm n^2 \sin^2 T}}.$$

Ce théorème, dont on peut trouver le germe dans le mémoire de Lagrange sur la transformation, est identique au fond à la transformation de Landen. L'auteur, qui y est parvenu indépendamment des recherches antérieures, l'applique au calcul des intégrales elliptiques dans un mémoire d'astronomie; de plus, ses mémoires inédits renferment de remarquables propriétés de la moyenne arithmético-géométrique de $1+x$ et $1-x$, étudiée tant au moyen des séries que des produits infinis(2). L'étendue de ces

---

(1) *Disquisitiones*, § 335; *Werke*, B. III, p. 404-432. Les *Disquisitiones* parurent en 1801.

(2) *Determinatio attractionis, etc.*, sub fin. *Werke*, B. III, p. 333-360; *Nachlass*, p. 360 sqq., p. 433 sqq. — JACOBI dans les *Fundamenta*, § 38, p. 95; § 47, in fin. p. 135; § 66, p. 186, cite ou emploie des résultats trouvés par GAUSS au moyen des fonctions elliptiques. — SCHERING a fait remarquer (*Mathematische Annalen*, I, p. 138) les relations nouvelles que l'on peut trouver, sur les fonctions θ, au moyen des travaux inédits de Gauss. D'après lui, Gauss semble avoir entrevu les relations qui existent entre les transcendantes elliptiques et les fonctions d'une variable imaginaire, et la possibilité d'introduire ces transcendantes dans le problème de la rotation des corps (*Notes* qui terminent le troisième volume des œuvres de Gauss). — Sur les recherches de Gauss, voir aussi son témoignage propre : ABEL, *OEuvres complètes*, introduction p. VII (dans une lettre à Schumacher),

recherches permet de croire que Gauss était arrivé à plusieurs des résultats trouvés par Jacobi sur la transformation et d'Abel sur la multiplication et la division. Mais la plupart de ces découvertes de Gauss ont été sans influence sur la marche de la science, parce qu'il n'a publié que celles auxquelles il avait pu donner une forme parfaite et qu'il a été prévenu pour les autres par Abel et Jacobi. « *Juste peine,* dit ce dernier dans une lettre à Legendre, *de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux.* »

CHAPITRE II.

LA THÉORIE DE LA MULTIPLICATION ET DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DEPUIS LA DÉCOUVERTE DE LA DOUBLE PÉRIODICITÉ.

9. *Travaux d'*Abel *sur la multiplication des fonctions elliptiques.* Vers 1826, Abel (1802-1829) eut l'idée de regarder la limite supérieure de l'intégrale elliptique de première espèce comme fonction de cette intégrale et d'introduire dans l'étude de cette nouvelle transcendante la considération des valeurs imaginaires de la variable. En exprimant le théorème de l'addition au moyen de cette fonction, il découvrit la double périodicité, puis il se servit de cette dernière propriété pour aborder le problème de la multiplication (1). Voici comment il arrive aux formules fondamentales pour la

---

Jacobi, lettre du 5 août 1827 à Legendre, vers la fin (*Annales de l'école normale supérieure*, t. VI, p. 127 et suivants). — Borchardt s'est occupé de la moyenne arithmético-géométrique (*Crelle,* t. 58, p. 127), mais Bertrand (*Calc. diff.*, p. 216), lui attribue à tort l'équation différentielle à laquelle elle satisfait; cette équation se trouve dans Gauss, III, p. 360 sqq.

(1) *OEuvres complètes,* I, XII, p. 141-154 (*Crelle,* t. 2). La notation d'Abel dans ses premiers mémoires est la suivante :

$$\varepsilon=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}\,;\; x=\varphi\varepsilon=\varphi(\varepsilon,c,e);\; \sqrt{1-c^2x^2}=f\varepsilon,\; \sqrt{1+e^2x^2}=\mathrm{F}(\varepsilon).$$

Cette notation est éminemment propre à conduire à la découverte de la période imaginaire, puisque en changeant x en $z\sqrt{-1}$, ε en $\eta\sqrt{-1}$, on trouve

$$\eta=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-e^2z^2)(1+c^2z^2)}}\,;\quad \varphi(\varepsilon\sqrt{-1},c,e)=\sqrt{-1}\,\varphi(\eta,e,c),\ \text{etc.}$$

C'est aussi celle qu'il est préférable d'employer quand on étudie la lemniscate. Dans ses

fonction λ dans le cas de la multiplication par un nombre impair. La méthode est analogue pour les autres fonctions et pour le cas de la multiplication par un nombre pair(1).

Le théorème de l'addition donne $\lambda(2n\varepsilon)$ en fonction $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$ et $\nu(n\varepsilon)$ et $\lambda(n+1)\varepsilon - \lambda(n-1)\varepsilon$ au moyen des mêmes expressions et de $\lambda\varepsilon, \mu\varepsilon, \nu\varepsilon$. On déduit de là que, dans le cas de n pair, $\lambda(n\varepsilon) : \lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon$, et dans le cas de n impair, $\lambda(n\varepsilon) : \lambda\varepsilon$ est une fonction rationnelle de $\lambda^2\varepsilon$. Posons

$$\lambda(n\varepsilon) = \frac{P_n}{Q_n} = \theta(\lambda\varepsilon) = \theta x \qquad (\alpha)$$

Au moyen de la double périodicité, on prouve que les racines de cette équation en x sont les valeurs distinctes de l'expression :

$$\lambda\left[(-1)^a\varepsilon + \frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right] \qquad (\beta)$$

a et b étant des nombres entiers quelconques. Cette formule donne n^2 valeurs pour x dont aucune n'est une racine multiple de l'équation (α); car s'il en était ainsi pour l'une d'elles, elle satisferait aussi à l'équation

$$\frac{d\theta x}{dx} = 0.$$

qui est indépendante de ε; ce qui est absurde, puisque toute racine (β) est fonction de ε.

En fesant $n\varepsilon = 0$ et $n\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, l'équation (α) deviendra $P_n = 0, Q_n = 0$ et on déduira de (β) les racines de ces équations.

Mettons l'équation (α) sous la forme

$$Q_n\lambda(n\varepsilon) = P_n. \qquad (\gamma)$$

En exprimant la somme de Sx et le produit Px des racines au moyen des coëfficients, on trouve

$$\lambda(n\varepsilon) = ASx, \quad \lambda(n\varepsilon) = BPx, \qquad (\delta)$$

---

mémoires ultérieurs, Abel emploie la notation λ; MM. Briot et Bouquet par analogie, ont appelé μ et ν les deux autres fonctions. Jacobi et la plupart des géomètres écrirent *sinam*, *cosam*, *Δam* au lieu de λ, μ, ν et Gudermann abrége ces notations en *sn*, *cn*, *dn*. M. Lamé, dans ses *Fonctions inverses*, nous semble avoir prouvé que, contrairement aux apparences, la notation par l'amplitude de Jacobi voile les analogies des fonctions elliptiques avec les fonctions trigonométriques et exponentielles.

(1) *OEuvres*, I, XII, p. 154-165; 186-194. Le même mémoire contient une nouvelle démonstration du théorème de l'addition, la théorie de la division avec application à la lemniscate, et celle du développement des fonctions elliptiques en séries et en produits infinis « *découverte*, dit Lejeune-Dirichlet, *qui est plus importante que celle de la résolubilité des équations de la division*. »



A étant une constante que l'on détermine en fesant $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, B une autre constante que l'on détermine en fesant $\varepsilon = 0$. La dernière formule se transforme aisément en la suivante :

$$\lambda(n\varepsilon) = nP \frac{1 - \frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_1}}{1 - \frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_4}}, \qquad (\delta')$$

ρ_1 et ρ_4 ayant la signification indiquée dans notre mémoire.

Abel ne donne les formules (δ) et (δ') que pour n impair. La méthode employée pour y arriver ne réussit pas dans le cas de n pair, mais on doit remarquer que la formule (δ') peut se déduire de la connaissance des racines de $P_n = 0$, $Q_n = 0$, et que de (δ') on peut tirer ensuite une formule analogue à la première des deux formules (δ).

Abel a perfectionné plus tard cette solution du problème de la multiplication au moyen d'une méthode de calcul de proche en proche de $\lambda\,(n\varepsilon)$ qui donne cette expression sous forme irréductible (1). Les formules qu'il emploie pour cela sont les suivantes :

$$\lambda(2n-1)\varepsilon \times \lambda\varepsilon = \frac{\lambda^2(n\varepsilon) - \lambda^2(n-1)\varepsilon}{1 - k^2\lambda^2(n\varepsilon)\lambda^2(n-1)\varepsilon}$$

$$\lambda^2(2n\varepsilon) = \left[\frac{2\lambda(n\varepsilon)\,\mu(n\varepsilon)\,\nu(n\varepsilon)}{1 - k^2\lambda^4(n\varepsilon)}\right]^2$$

$$\lambda(2n-1)\varepsilon = \frac{\lambda^2(n\varepsilon) - \lambda^2(n-1)\varepsilon}{\lambda(n\varepsilon)\,\lambda'(n-1)\varepsilon - \lambda(n-1)\varepsilon\,\lambda'(n\varepsilon)} = \frac{\lambda(n\varepsilon)\lambda'(n-1)\varepsilon - \lambda(n-1)\varepsilon\lambda'(n\varepsilon)}{1 - k^2\lambda^2(n-1)\varepsilon\lambda^2(n\varepsilon)}$$

Si l'on suppose $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ exprimés au moyen de $\lambda\varepsilon$, on voit facilement que le second membre de la seconde formule est une fraction irréductible. Si on suppose en outre $\lambda^2(n-1)\varepsilon$ exprimé au moyen de $\lambda\varepsilon$, aucun facteur en $\lambda\varepsilon$ ne peut être commun au numérateur et au dénominateur du second membre de la première formule. Car si $\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1$ était un pareil facteur, on aurait à la fois

$$\lambda^2(n\varepsilon_1) = \lambda^2(n-1)\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad 1 - k^2\lambda^2(n\varepsilon_1)\lambda^2(n-1)\varepsilon_1 = 0.$$

---

(1) *OEuvres*, XXI, ch. I, § 4, p. 346-349. L'auteur montre en outre comment son théorème général sur l'addition des fonctions elliptiques peut donner la solution du problème de la multiplication.

On déduit de là, $\lambda^2(n\varepsilon_1) = \lambda^2(n-1)\varepsilon_1 = \pm \frac{1}{k}$. Mais de la dernière formule on tire les suivantes :

$$\lambda(n\varepsilon_1)\mu(n-1)\varepsilon_1\nu(n-1)\varepsilon_1 = 0 \qquad \lambda(n-1)\varepsilon_1\mu(n\varepsilon_1)\nu(n\varepsilon_1) = 0$$

qui sont incompatibles avec ces valeurs de $\lambda^2(n\varepsilon_1)$ et $\lambda^2(n-1)\varepsilon_1$.

Abel trouve ainsi que P_n est du degré n^2, Q_n du degré n^2-1 en x, quand n est impair, que $P_n : \lambda\varepsilon$ est du degré n^2-3, Q_n du degré n^2 dans le cas de n pair; que tous les coëfficients de ces deux polynomes sont des fonctions entières de k^2, enfin que celui de x^2 dans Q_n est toujours nul.

10. *Autres travaux sur la multiplication.* Le principal progrès de la théorie de la multiplication est dû à Jacobi. Outre qu'il a déduit la solution de cette question de celle de la transformation, il a trouvé une construction géométrique plane de $\lambda(n\varepsilon)$ au moyen de $\lambda\varepsilon$, et même $\lambda(n\varepsilon+\alpha)$ en traitant une question en apparence élémentaire, qui est connue sous le nom de *problème de Fuss* (1). Ces recherches de Jacobi ont été l'origine de plusieurs autres travaux sur la même question ou sur des questions analogues (2). Mais l'illustre géomètre a aussi étudié directement les formules de la multiplication : le premier il a remarqué que le numérateur et le dénominateur de ces formules satisfont à une équation différentielle très-simple, et montré que l'on pouvait trouver sans peine des relations entre les coëfficients du numérateur et du dénominateur. Voici comment on procède pour cela. Soit, par exemple, n impair, $\lambda\varepsilon = x$, on aura

$$\lambda(n\varepsilon) = \frac{a_0x + a_2x^3 + \qquad a_{n^2-1}x^{n^2}}{1 + b_2x^2 + b_4x^4 + \cdots + b_{n^2-1}x^{n^2-1}}.$$

Soit ε remplacé par $\varepsilon + K'\sqrt{-1}$, il est facile de voir que cette formule devient

$$\lambda(n\varepsilon) = \frac{b_{n^2-1}x + b_{n^2-3}k^2x^3 + \cdots \quad + k^{n^2-1}x^{n^2}}{a_{n^2-1} + \cdots \qquad + a_0k^{n^2-1}x^{n^2-1}}.$$

En identifiant ces deux expressions, on trouve de nombreuses relations

(1) Jacobi, *Crelle* 3, p. 376. Il en déduit la transformation de Landen, *Crelle* 32, p. 357. Le premier travail de Jacobi est rapporté dans Legendre, dans Verhulst, et dans plusieurs traités sur les fonctions elliptiques.

(2) Richelot, *Crelle* 5, p. 250 et 38, p. 353. Mention, *Bulletin de St Pétersbourg*, 1859, p. 15, 33, 507. Sur la question au point de vue géométrique, voir Poncelet, *Propriétés projectives*, section IV, ch. II, Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 580; Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, t. 1er, p. 486 et suiv., où l'on trouve une notice bibliographique sur la question et une note remarquable de M. Moutard.

entre les a et les b. Si on veut obtenir la valeur de a_0 ou le rapport b^{n^2-1} : a_{n^2-1} il est évident qu'il suffit de faire $\varepsilon = 0$ dans les deux valeurs de $\lambda(n\varepsilon) : x$. On peut aussi, au lieu de faire cette substitution dans la seconde, faire $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ ou $x = \infty$ dans la première (1).

Les recherches ultérieures des géomètres sur la multiplication ne sont guère que le développement des idées d'Abel et de Jacobi. Sanio en 1835 étudia la multiplication par un nombre pair. Il donne la méthode de calcul de proche en proche d'Abel, et cherche ensuite les facteurs du numérateur et du dénominateur de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ au moyen de la double périodicité; les facteurs linéaires trouvés étant en nombre égal au degré du numérateur et du dénominateur, degré donné par la méthode d'Abel, il en conclut que chacun de ces facteurs est simple. Il trouve comme Abel les formules qui sont relatives aux sommes dans le cas où n est pair et s'en sert pour étendre la multiplication aux intégrales de seconde et de troisième espèce. Il démontre les formules sur les produits $P\lambda^2 r_1$ etc. dont il a besoin, en remarquant que r_1 peut être remplacé par $K'\sqrt{-1} - r_1$ (2).

Gudermann n'emploie pas la méthode d'Abel pour trouver $\lambda(n\varepsilon)$ sous forme irréductible, de sorte qu'il suppose implicitement, sans démonstration, que les facteurs du numérateur et du dénominateur sont simples. Mais, à cela près, son livre contient une exposition complète de la théorie de la multiplication; il cherche les relations entre les coëfficients du numérateur et du dénominateur et s'en sert pour trouver les formules sur les produits $P\lambda^2\rho_1$ etc. (3).

Broch a suivi complètement Abel dans la question de la multiplication;

---

(1) Il résulte évidemment de cette dernière remarque que la méthode suivie pour trouver les produits $P\lambda^2\rho_1$ etc., dans notre mémoire (voir plus bas) ne diffère pas au fond de celle qui est donnée dans Broch et Gudermann d'après Jacobi. Notre exposition est plus simple, parce que nous ne mêlons pas la détermination des coëfficients à celle de ces produits. Les recherches de Jacobi sur la multiplication se trouvent dans *Crelle* 3, p. 403, 4, p. 185 et 30, p. 269 où il démontre des formules données par Eisenstein. Disons en passant que la plupart des recherches de celui-ci sur les fonctions elliptiques et leur emploi dans la théorie des nombres ont été réunies dans un volume, publié sous les auspices de Gauss, avec le titre : *Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der Elliptischen Functionen von* Eisenstein (Berlin, Reimer, 1847).

(2) *Crelle,* 14, p. 1 et suiv. Nous employons les mêmes notations que dans notre mémoire.

(3) *Théorie der Modular Functionen,* etc. *Abschnitt* XIII.

il a montré en outre comment la méthode de proche en proche du géomètre norwégien combinée avec la remarque de Jacobi sur les coëfficients pouvait donner les plus importants de ceux-ci (1).

Briot et Bouquet ont seulement esquissé la solution du problème de la multiplication dans leur ouvrage sur les fonctions périodiques où ils ont profité des indications contenues dans Abel et Jacobi (2). Cayley et Baehr se sont occupés du calcul effectif des coëfficients du numérateur et du dénominateur (3) et Brioschi a écrit les formules de la multiplication au moyen des déterminants (4). Ces derniers travaux n'ont que très-indirectement rapport à ce qui fait l'objet de notre opuscule.

Il n'en est pas de même d'un mémoire de U. H. Meyer. Celui-ci cherche d'abord comme Abel le degré du numérateur et celui du dénominateur de $\lambda^2(n\varepsilon)$ en $\lambda^2\varepsilon$, que n soit pair ou impair. Il en conclut sans peine que dans les deux cas

$$\frac{1-\dfrac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_1)}}{1-\dfrac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_2)}}$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes arbitraires, est égal à une fraction rationnelle en $\lambda^2\varepsilon$, dont le numérateur et le dénominateur sont de degré n^2 par rapport à $\lambda^2\varepsilon$. La double périodicité donne immédiatement cette fraction rationnelle; elle est égale à

$$\text{A. P}\;\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\left(\varepsilon_1+\dfrac{2a\text{K}+2b\text{K}'\sqrt{-1}}{n}\right)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\left(\varepsilon_2+\dfrac{2a\text{K}+2b\text{K}'\sqrt{-1}}{n}\right)}$$

a et b recevant toutes les valeurs entières qui donnent des facteurs distincts. En fesant $n\varepsilon_2=\text{K}'\sqrt{-1}$, on arrive à la valeur de

$$1-\frac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_1)}.$$

Puis si $\lambda(n\varepsilon_1)=0,\ =1,\ =\frac{1}{k^2}$, on trouve $\lambda^2(n\varepsilon)$, $\mu^2(n\varepsilon)$, $\nu^2(n\varepsilon)$. Dans cette méthode, une seule formule donne les valeurs des trois fonctions, tant dans

(1) *Théorie élémentaire*, etc., ch. V.

(2) *Théorie des fonctions doubl. périod.*, liv. V, ch. II. Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

(3) Cayley, *Crelle* 57, p. 58. Baehr, *Archiv. de Grunert*, t. 36, p. 125.

(4) Brioschi, *Comptes rendus* 59, p. 769.

le cas de n pair que dans le cas de n impair. Nous verrons plus bas que Meyer a étendu sa méthode à la théorie de la transformation (1).

11. *Solution du problème de la transformation par* Jacobi. Jacobi (1804-1851) fit connaître la première solution générale du problème de la transformation, presqu'en même temps qu'Abel publiait celle du problème de la multiplication et de la division (2).

(1) *Archiv. de Grunert*, 16, p. 364 et suiv.

(2) Les *Annales de l'École normale sup.*, VI, cah. 2 et 3, p. 127-177 (1869), contiennent onze lettres inédites de Jacobi à Legendre, précieuses surtout parce qu'elles nous font connaître la marche suivie par le géomètre allemand pour arriver à son beau théorème. Voici un passage confidentiel de la lettre du 12 avril 1828 : « Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant *la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique*. La chose étant trouvée on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. *Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant.* » Voici la chaîne des idées dont parle Jacobi. Il reconnut d'abord au moyen des coëfficients indéterminés que le problème est possible en général. (*Cf. Fundamenta*, §§ 3, 4, 10.) Par la même méthode, il trouva les transformations relatives au nombre 3 et au nombre 5. La ressemblance de la transformation relative à 3 avec la formule de la multiplication par 3 lui fit soupçonner quelque rapport entre ces deux questions; *par tâtonnement* il découvrit la transformation qui combinée avec celle qu'il possédait déjà, donnait la multiplication par 3. Il écrit alors (13 juin 1827) sa première lettre à Schumacher sur les transformations relatives à 3 et à 5. Il s'aperçoit ensuite que le numérateur, dans la transformation se rapportant au nombre 3, s'évanouit pour $x=\lambda\left(\frac{2K}{3}\right)$; il en conclut par induction la composition du numérateur et du dénominateur de la première transformation rationnelle simple pour un nombre quelconque et il écrit sa seconde lettre à Schumacher (2 août 1827). Trois jours après il est en possession d'une idée nouvelle : il a songé à introduire les imaginaires dans la théorie des fonctions elliptiques, et grâce à cela, il peut déduire l'une de l'autre les transformations supplémentaires dont il était en possession. C'est alors qu'il communique toutes ses découvertes à Legendre (5 août 1827). Il n'avait pas encore alors la démonstration des formules générales trouvées par tâtonnement et communiquées à Schumacher. Celui-ci soumit d'abord la découverte de Jacobi à Gauss, et publia ses deux lettres seulement en septembre, dans le n° 123 des *Astronomische Nachrichten*. Le 18 novembre, Jacobi envoya à Schumacher la démonstration des formules des tranformations simples rationelles, et elle parut en décembre dans le n° 127 des *Astr. Nachrichten*. La seconde lettre de Jacobi à Legendre est du 12 janvier 1828. Il y analyse la découverte d'Abel qui avait paru dans le n° 2 du journal de *Crelle*. Ignorant la date de la publication de ce numéro, nous ne pouvons savoir si les idées d'Abel ont pu contribuer à faire trouver à Jacobi la démonstration de ses théorèmes. En tout cas, il est certain que Jacobi n'a pas connu la transformation relative au nombre 3 trouvée par Legendre et identique à la sienne; et personne ne doute que Jacobi et Abel ne pussent faire chacun de son côté toutes les découvertes de l'autre s'ils ne s'étaient prévenus mutuellement.

Les lettres de Jacobi sont très-intéressantes à un autre point de vue encore; elles peignent au vif le caractère du grand mathématicien. Nous signalons surtout au lecteur curieux la dernière lettre où il mêle l'histoire de ses recherches sur les perturbations célestes à celle de son mariage.

Soit, dit-il, à chercher une solution rationnelle de

$$\frac{dy}{\sqrt{fy}} = \frac{dx}{\sqrt{f_1 x}}$$

$$fy = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4, \quad f_1 x = A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + D_1 x^3 + E_1 x^4.$$

Posons $y = U : V$, U et V étant des fonctions entières de x, la première de degré p, la seconde de degré p, ou de degré inférieur. On trouvera

$$\frac{dx}{\sqrt{f_1 x}} = \frac{VdU - UdV}{\sqrt{Y}}, \qquad Y = AV^4 + BV^3U + CV^2U^2 + DVU^3 + EU^4.$$

En exprimant que $Y : f_1 x$ est un carré T^2, on trouve un nombre d'équations de condition égal ou inférieur au nombre des coëfficients indéterminés de U et V. Il en résulte que le problème est ramené à la recherche de M, M étant tel que l'on ait :

$$\frac{dy}{\sqrt{fy}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{f_1 x}}, \qquad M = \frac{T}{V\frac{dV}{dx} - U\frac{dV}{dx}}.$$

Or par un raisonnement dont nous donnons un exemple (*Mémoire*, n° 40), on prouve que M est une constante. Ainsi, en général, la transformation proposée est possible.

Au moyen des mêmes principes, Jacobi prouve ensuite que le problème de la transformation se ramène à la recherche de l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-l^2y^2}} = \frac{dx}{M\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

et que l'on peut supposer, si $y = U : V$, que U est une fonction impaire de degré n, V une fonction paire de degré $n - 1$ en x, n étant un nombre entier impair.

Avant d'aborder la recherche de y pour n quelconque, il suppose $n = 3$ et $n = 5$ et arrive par les coëfficients indéterminés aux transformations simples relatives à ces deux nombres. Il en déduit ensuite la multiplication par 3 et par 5 en effectuant successivement les deux transformations. A partir de là, Jacobi n'emploie plus la méthode des coëfficients indéterminés; il a recours presque exclusivement à la double périodicité.

Il n'indique pas par quelle voie il est parvenu aux formules générales de la transformation, mais on sait maintenant que c'est par tâtonnement et

induction qu'il les a trouvées. Il se donne la valeur de $1-y$ sous une forme d'où il déduit la suivante :

$$1-y=(1-x)\mathrm{P}\,\frac{1-\lambda(\varepsilon+4\mathrm{T}\omega)}{\mu^2(s\omega)}, \qquad x=\lambda\varepsilon$$

ω désigne la quantité $(m\mathrm{K}+m_1\mathrm{K}'\sqrt{-1})$: n, m et m_1 n'ayant pas de facteur commun qui se trouve dans n, et les autres lettres ayant la même signification que dans notre mémoire. Si on suppose $y=0$ quand $x=0$, on déduira aisément de là les valeurs pour lesquelles y s'annule et par suite l'expression de y. Pour trouver $1-ly$ supposons que y se change en $(ly)^{-1}$ quand x se change en $(kx)^{-1}$, la formule qui donne $1-y$ se transformera en une autre qui donnera $(1-ly):ly$. Les valeurs de $\sqrt{1-y^2}$ et de $\sqrt{1-l^2y^2}$ s'obtiennent ensuite avec la plus grande facilité. Les constantes M et l résultent des hypothèses faites sur y. Enfin la vérification de la solution se fait comme nous l'indiquons dans le mémoire (n° 40). Jacobi expose en outre, d'après Legendre, une autre vérification de la solution plus directe que la sienne même, et il cherche y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$ en sommes par le procédé qui a donné les formules analogues à Abel dans le problème de la multiplication. Enfin il déduit des formules générales, celles qui se rapportent aux transformations simples, les transformations complémentaires et supplémentaires et en tire la solution du problème de la multiplication.

La méthode de Jacobi pour la transformation a été exposée pour les transformations simples par Legendre, Poisson, Lamé. Le dernier a très bien fait voir l'analogie des formules trouvées pour les trois fonctions, en introduisant dans les formules ce qu'il appelle le complément naturel. Gudermann a exposé la transformation générale dans son traité sur les fonctions elliptiques (1).

---

(1) La solution de Jacobi est exposée dans la première partie des *Fundamenta,* dans Legendre, t. III, supp. I et III, § 1 du *Traité des fonctions elliptiques,* Poisson, *Mémoires de l'Institut,* X, p. 73-119 ; Lamé, *Fonctions inverses,* leçons X-XII, Gudermann, *Théorie,* etc., ab. XIX. — Comme complément et commentaire des *Fundamenta,* on peut citer les onze lettres de Jacobi à Legendre et les mémoires du même auteur contenus dans *Crelle,* 3, p. 191, 192, 303, 403 ; 4, p. 185. Sur les intégrales de seconde et de troisième espèce et les sommes Jacobi, *Crelle,* 4, p. 371 ; 6, p. 397. Sur les équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur des formules de la transformation, Eisenstein *Math. Abh.,* p. 207 et suiv.; Jacobi *Crelle,* 3, p. 403; 4, p. 185; 6, p. 371; Cayley, *Crelle,* 37, p. 58; 39, p. 16;

Jacobi, outre la solution que nous venons d'esquisser, donne dans les *Fundamenta* ou dans ses mémoires, la théorie des équations modulaires et les formules pour la transformation des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce, grâce aux fonctions θ au moyen desquelles il les exprime. Il signala le premier les équations différentielles remarquables auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur des formules de la transformation, et s'occupa en même temps qu'Abel de la multiplication complexe. Dans un de ses mémoires, il retrouve toutes les formules de la transformation, en partant directement de la considération de certaines sommes.

12. *Travaux d'*Abel *sur la transformation.* Abel semble avoir trouvé la solution du problème de la transformation, sans connaître les travaux de Jacobi. Mais ses premières recherches sur ce sujet ne parurent que quelques mois après celles de Jacobi sur les transformations simples. Nous indiquons plus bas (*Mémoire*, n° 34), comment Abel vérifie la solution du problème de la transformation. Nous allons faire connaître la méthode qui le conduit aux formules fondamentales.

Il considère la fonction

$$\psi x = \varphi\theta = \mathrm{S}\lambda(\varepsilon + \mathrm{T}\omega) = \lambda\theta\left[1 + \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda'(q\omega)}{1 - k^2\lambda^2\theta\lambda^2(q\omega)}\right] = mx\mathop{\mathrm{P}}_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^2 - \mathrm{A}^2}{x^2 - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} - q\omega)}$$

où $\omega = (4m'\mathrm{K} + 2\mu\mathrm{K}'\sqrt{-1}) : n$, μ ou m' étant premier avec n, et x représentant $\lambda\theta$. En faisant $x = \infty$, on trouve la valeur de m, et en fesant $x = 0$, celle de $\psi x : x$. La théorie de la double périodicité donne ensuite :

$$\varphi\varepsilon - \psi x = -\mathrm{P}[x - \lambda(\varepsilon + \mathrm{T}\omega)] : \mathop{\mathrm{P}}_{1}^{\frac{n-1}{2}} [x^2 - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} - q\omega)].$$

41, p. 85 ; Eisenstein, *Math. Abh.*, p. 207. Sur la multiplication complexe, Jacobi, *Annales de l'école normale*, VI, p. 139 ; *Crelle*, 3, p. 192 ; Abel, *OEuvres*, I, p. 242, 272, 285 ; Hoffmann, *Crelle*, 48, p. 332 ; Kronecker, *Journal de Liouville* (1858), p. 265 ; Königsberger, *die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen* (Leipzig, Teubner, 1868), § 31, p. 150 ; Briot et Bouquet, § 223, p. 274. Sur les équations modulaires, Jacobi, *Crelle*, 3, p. 182 ; *Annales de l'école norm. sup., lettre du 12 janvier 1828* ; *Fundam*, § 29, p. 66 ; Gützlaff, *Crelle*, 12, p. 173 ; Sohnke, *Crelle*, 12, p. 178 ; 16, p. 97 ; Schröter, *Crelle*, 58, p. 378. — Jacobi a étendu aux intégrales multiples ses recherches sur la transformation, *Crelle*, 2, p. 234 ; 8, p. 283, 321 ; 10, p. 101. Nous signalons encore ici sur la transformation les écrits suivants où le problème est abordé au moyen des fonctions θ : Eisenstein, *Crelle*, t. 30, 32, 35. (*Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen*) ou *Math. Abh.*, p. 159 etc. ; Raabe, *Crelle*, 15, p. 191 ; Hermite, *Crelle*, 60, p. 304 ; *Journal de Liouville*, 1863, p. 289 ; *Comptes-rendus*, t. 46, p. 171. Königsberger, *die Transf.*, *etc.*

Pour $\varepsilon = 0$, nous trouverons ψx. Soit ensuite $y = M\psi x$, $M\varphi K = 1$, $Ml\varphi(K'\sqrt{-1}) = 1$; fesons $\varepsilon = K$, et $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, la formule précédente nous donnera $1 \pm y$, $1 \pm ly$ et par suite toutes les formules fondamentales de la transformation.

Telle est la marche suivie par Abel; elle s'appuie sur la double périodicité plus que celle de Jacobi, mais comme celle-ci, elle procède par vérification(1). Tous les efforts du géomètre norwégien, à partir de ce premier travail, furent employés à démontrer que l'on pouvait parvenir d'une manière systématique à cette solution et à prouver que le problème de la transformation, conçu de la manière la plus générale, se ramène au cas ou y est rationel et de degré premier en x.

Il parvint à faire voir comment on est amené nécessairement à considérer la somme ψx dans un beau mémoire qui parut dans les *Astronomische Nachrichten* et que Jacobi déclara, avec une véritable injustice envers lui-même, au-dessus de ses propres travaux; voici comment procède Abel. Il cherche par les coëfficients indéterminés les solutions du premier degré en x. Soit ensuite $y = U : V$ une solution rationelle de l'équation différentielle de la transformation, U et V étant des fonctions de x. Appelons $S\lambda\varepsilon$ la somme des racines de $y = U : V$, en considérant y comme constant. En la mettant sous la forme $Vy = U$, on trouvera par la théorie des fonctions algébriques que l'on a :

$$(f - gy)S\lambda\varepsilon + (f' - g'y) = 0,$$

f, g, f', g' étant des constantes. Donc si $S\lambda\varepsilon = \varphi\varepsilon$,

$$y = \frac{f' + f\varphi\varepsilon}{g' + g\varphi\varepsilon}.$$

La recherche de y est ramenée à celle de la somme $\varphi\varepsilon$ et la théorie de la transformation peut dès lors s'établir à peu près comme dans le premier mémoire. L'auteur examine le cas ou $f' = g' = 0$, et diverses particularités dont nous ne pouvons pas parler ici. Quand on a une transformation d'un degré donné, toutes les transformations de ce degré, peuvent en être déduites au moyen de celles du premier degré. Dans un autre mémoire,

(1) *OEuvres complètes*, I, XII, p. 250-252. Abel crut d'abord que Jacobi n'avait connu que les transformations simples, mais, en même temps que son mémoire, en paraissait un de Jacobi qui s'occupait des transformations imaginaires.

Abel applique cette méthode à la recherche de toutes les transformations dans le cas où l'on suppose les modules réels et à cette occasion il donne la première formule pour les transformations paires qui ait été trouvée. Cette méthode de recherche conduit naturellement à l'étude de la multiplication complexe et à celle du nombre des transformations relatives à un nombre donné. Abel, pour une des transformations simples, vérifie la solution au moyen des développements en produits infinis, ce qui est le premier exemple de l'application de ces développements à la question de la transformation (1).

Enfin, Abel reprit une dernière fois la théorie de la transformation sous un point de vue plus général : il se propose de chercher la relation linéaire la plus générale qui puisse exister entre les intégrales elliptiques, les fonctions logarithmiques et les fonctions algébriques d'un nombre quelconque de variables, liées entr'elles par des équations algébriques. Ce problème, d'une si grande généralité qu'il semble inabordable, de quelque manière que ce soit, Abel, parvint à le ramener à celui que Jacobi et lui-même avaient résolu ; c'est-à-dire, à la transformation rationnelle dans le cas d'un nombre impair, et même Abel montre que l'on peut supposer que n est premier. Nous ne pouvons pas donner ici une idée de ces recherches; nous dirons seulement qu'il repose sur le théorème de l'addition des intégrales elliptiques ou abéliennes en nombre quelconque dont Abel était déjà en possession en 1826 et dont Jacobi signala tant de fois la portée immense avant d'en déduire lui-même les fondements de la théorie des fonctions abéliennes (2).

13. *Travaux de* Plana, *d'*Ivory *et de* Sanio *sur la transformation.* La découverte de la solution générale du problème de la transformation eut un grand retentissement, et immédiatement plusieurs géomètres se mirent à l'œuvre pour perfectionner ou étendre la nouvelle théorie. Le premier de tous, Plana, publia, dès 1828, un mémoire où il montre que le problème est possible par la méthode des coëfficients indéterminés. Mais il ne semble pas avoir compris à cette époque l'importance de la découverte de la double

---

(1) Voir *Mémoires*, XIII, XIV, XVII du tome Ier des *OEuvres complètes*.

(2) *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, OEuvr. compl.*, XXI, p. 326-409; interrompu par la mort. Sur Abel, voir le jugement de Jacobi, *Lettre à Legendre du 14 juin* 1829. Sur le théorème d'Abel, Jacobi, *Lettres à Legendre du* 18 *janvier* 1829, 2 *juillet* 1830, 27 *mai* 1832 et *Crelle* 8, p. 413, 9, p. 394; 13 p. 55.

périodicité, car il ne sait comment déterminer les coëfficients du numérateur et du dénominateur des expressions dont l'algèbre lui a donné la forme générale. Trente ans plus tard il reprit encore cette question ; mais il semble, dans ce nouveau travail, ne pas vouloir user encore de toutes les ressources fournies par la double périodicité, et son mémoire est bien loin de contenir une méthode simple et naturelle pour arriver aux formules de la transformation (1).

Ivory, en 1831, s'est occupé des transformations simples rationnelles. Son mérite principal est d'avoir montré plus explicitement que Jacobi comment la double périodicité peut faire découvrir les facteurs du numérateur et du dénominateur de la transformation (2). Mais il admet sans démonstration, pour ainsi dire, que ces facteurs ne sont pas multiples. C'est là que l'on trouve pour la première fois les calculs détaillés se rapportant à une transformation paire ; mais nous ferons remarquer qu'Abel avait déjà indiqué les formules principales. Ivory effectue la vérification de la solution et la recherche des transformations complémentaires d'après Jacobi (3).

Un travail plus important est celui de Sanio, publié peu après (1833). L'auteur s'occupe des transformations générales que nous avons appelées de seconde et de troisième classe dans notre mémoire. Dans la transformation irrationnelle, la marche suivie est calquée sur celle de Jacobi dans les *Fundamenta* pour la transformation rationnelle de degré impair. Sanio en déduit, par passage du réel à l'imaginaire, la transformation de troisième classe ;

---

(1) *Mémoires de Turin*, 1re série, t. 23, p. 333-337 (1829 ; mémoire présenté le 15 juin 1828) ; 2de série, t. 20, p. 189-293 et 423-429. Dans son premier mémoire, il disait : « On ne comprend pas facilement par quel enchainement d'idées Jacobi a pu *être naturellement conduit* à la forme singulière qu'il attribue à une certaine fonction rationnelle d'une seule variable qui constitue la base et le point de départ de sa transformation. *Le hasard ne saurait enfanter un résultat aussi profondément caché.* » Dans son second mémoire (p. 234), Plana déclare qu'il doute beaucoup que Jacobi ait pu parvenir, comme le dit Legendre, à son théorème par les coëfficients indéterminés. Nous savons maintenant que Legendre était bien informé.

(2) On pouvait voir déjà cela très bien dans les mémoires d'Abel insérés n° 138 et 147 des *Astronomische Nachrichten*, mais ces mémoires semblent n'avoir pas attiré l'attention autant que ceux qui furent publiés dans le journal de Crelle. Ivory comme Plana fait des reproches à l'analyse de Jacobi « The demonstration of M. Jacobi require long and complicated calculations ; and *it can hardly be said that the train of deduction lead naturally* to the truth which are proved, or presents all the conclusions which the theory embraces in a connected point of view » (p. 351). Au moins la démonstration de Jacobi est rigoureuse, tandis que celle d'Ivory ne l'est pas.

(3) *Philosophical Transactions*, 1831, p. 349-377.

ensuite il établit directement les formules concernant celle-ci. Il traite encore comme Jacobi la transformation des intégrales de seconde et de troisième espèce. A notre avis, ce travail de Sanio pèche en un point essentiel. Pour arriver aux formules de la transformation, il se donne la valeur de y, et en déduit celle de $1-y^2$; ensuite de celle-ci la valeur de $1-l^2y^2$. Or, pour trouver la valeur de $1-y^2$, voici comment il raisonne : y^2 est d'après la valeur de y, une fonction de période $2n\omega$; il en sera de même de A^2-y^2, A étant une constante. Soit

$$A^2-y^2=\frac{W}{V},$$

W et V étant deux polynômes entiers en x^2 de degré n et $n-1$. Si dans cette équation, on regarde y^2 comme ayant une valeur déterminée et que $x^2=\lambda^2\alpha$ en soit une racine, toutes les autres sont données par les valeurs distinctes de $x^2=\lambda^2(\alpha+2p\omega)$. Ces racines sont toutes inégales en général. Mais, si A converge vers l'unité, elles convergent deux à deux, vers des valeurs égales, à l'exception de deux. Par cet artifice, Sanio arrive à trouver la forme de $1-y^2$. Mais ces déductions reposent sur cette hypothèse que, quel que soit A, une racine de l'équation, c'est à dire une quantité quelconque, peut être représentée par $\lambda^2\alpha$, et que la quantité α varie d'une manière continue avec la quantité A. C'est là une supposition gratuite dont il aurait été bien difficile d'établir la légitimité à cette époque(1). Nous pensons aussi que dans ce travail de Sanio, il y a, sur les relations qui existent entre les périodes de la fonction donnée et de la fonction transformée, maintes assertions peu fondées, que l'on ne trouve pas dans le travail de Jacobi qui lui sert de modèle(2).

14. *Travaux de* U. H. Meyer *et d'*Essen. Le mémoire de U. H. Meyer n'a rapport qu'aux transformations simples de la première, de la seconde et

---

(1) On ne peut pas étendre cette critique, comme il semblerait juste de le faire au premier abord, à la méthode donnée par Abel pour arriver aux formules de la multiplication. On sait *à priori* que les formules de la multiplication existent et le premier membre de l'équation n'est pas une quantité quelconque A, mais une fonction $\lambda(m\varepsilon)$ à laquelle $\lambda(m\varepsilon')$ peut certainement être rendu égal. Nous soupçonnons fort que c'est pour éviter le subtil raisonnement de Sanio, que Jacobi est parti de la valeur de $1-y$ et non de celle de y. Dans toutes les transformations autres que celle que Jacobi a considérée on se heurte nécessairement à la difficulté que nous signalons ici. — Sur la représentation d'une quantité quelconque par $\lambda\alpha$, voir Richelot, *Crelle,* 45. p. 225.

(2) *Crelle,* 14, p. 1-50. *De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione quae ad numerum parem pertinent commentatio, auctore* Sanio.

de la troisième classe, mais la méthode suivie est très remarquable. L'auteur pose

$$\varphi\varepsilon = P\lambda\left[\varepsilon + \frac{2T}{n}(K + K'\sqrt{-1})\right]$$

et il parvient à mettre la formule unique qu'il a trouvée pour la multiplication sous la forme suivante :

$$\frac{1 - \dfrac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_1)}}{1 - \dfrac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_2)}} = P\,\frac{1 - \dfrac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2\left(\varepsilon_1 + \dfrac{2T}{n}K'\sqrt{-1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2\left(\varepsilon_2 + \dfrac{2T}{n}K'\sqrt{-1}\right)}}.$$

Il cherche ensuite $d\varphi\varepsilon$. Pour cela il part de la formule suivante, qu'il tire d'une formule analogue sur la fonction λ :

$$\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2(2\varepsilon_1)}\right] \pm \left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2(\varepsilon + 2\varepsilon_1)}\right]\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2(\varepsilon - 2\varepsilon_1)}\right] =$$

$$\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2\varepsilon_1}\right]\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2\left(\varepsilon_1 + \dfrac{K}{n}\right)}\right]\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2(\varepsilon_1 + K'\sqrt{-1})}\right]\left[1 - \frac{\varphi^2\varepsilon}{\varphi^2\left(\varepsilon_1 + \dfrac{K}{n} + K'\sqrt{-1}\right)}\right].$$

En fesant converger ε vers 0, il parvient à en déduire $d\varphi\varepsilon$ sous la forme :

$$\frac{d\varphi\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{H}{\varphi\left(\dfrac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)}\, v.\, w. = \theta.\, v.\, w.$$

$$u = \frac{\varphi\varepsilon}{\varphi\left(\dfrac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)};\quad v^2 = 1 - u^2;\quad w^2 = 1 - l^2u^2;\quad l^2 = \frac{\varphi^2\left(K + \dfrac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)}.$$

Si on pose $\omega = \theta\varepsilon$, on trouve $u = o$, $v = 1$, $w = 1$ pour $\omega = o$ et d'ailleurs

$$\frac{du}{d\omega} = vw,\quad \frac{dv}{d\omega} = -vu,\quad \frac{dw}{d\omega} = -l^2u^2v^2.$$

Donc

$$u = \lambda(\theta\varepsilon, l),\quad v = \mu(\theta\varepsilon, l),\quad w = \nu(\theta\varepsilon, l),\quad \varphi\varepsilon = \varphi\left(\frac{K'\sqrt{-1}}{n}\right)\lambda(\theta\varepsilon, l).$$

Par conséquent

$$\frac{1-\frac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_1)}}{1-\frac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_2)}}=\mathrm{P}\,\frac{1-\frac{\lambda^2(\theta\varepsilon,l)}{\lambda^2\left[\theta\left(\varepsilon_1+\frac{2\mathrm{T}}{n}\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right),l\right]}}{1-\frac{\lambda^2(\theta\varepsilon,l)}{\lambda^2\left[\theta\left(\varepsilon_2+\frac{2\mathrm{T}}{n}\mathrm{K}'\sqrt{-1}\right),l\right]}},$$

formule qui résume toutes celles qui se rapportent aux transformations simples de 1re, de 2me et de 3me classe. L'auteur en déduit ces transformations, puis celles des intégrales de seconde et de troisième espèce (1).

Peu après U. H. Meyer, Essen s'occupa des transformations simples de seconde et de troisième classe. Il cherche les formules qui s'y rapportent, en se donnant, d'après Abel, la relation qui lie l'amplitude de la fonction transformée à celle de la fonction donnée ; grâce à quelques calculs élégants fondés sur la théorie des exponentielles imaginaires, il parvient au résultat cherché. U. H. Meyer montra comment les formules d'Essen pouvaient rentrer dans les siennes, et à ce propos, il fit remarquer comme Ivory et Plana que rien n'indiquait dans Jacobi comment il était parvenu à son beau théorème. Preuve que vingt-cinq ans après les beaux mémoires d'Abel, on ne saisissait pas encore toute la portée de la double périodicité (2).

15. *La théorie générale des fonctions doublement périodiques.* Cauchy, dans un mémoire remarquable publié dès 1825, posa les principes d'une nouvelle théorie des fonctions qui sont définies comme les fonctions elliptiques, par la considération d'une intégrale à limite supérieure variable. Il y donna la signification d'une intégrale où la variable passe d'une limite à l'autre par une série de valeurs imaginaires, et prouva qu'une pareille intégrale peut avoir des valeurs multiples. Vingt ans plus tard, il compléta ses premières recherches et arriva à un grand nombre de théorèmes importants sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Des travaux remarquables de Hermite et de Puiseux contribuèrent aussi

---

(1) *Archiv. de Grunert*, t. 16, p. 364-408 ; 17, p. 85-120 ; 426-454 (1851).

(2) Essen, *Arch. de Grunert*, t. 21, p. 240-248, 418, 422. Réclamation de Meyer, t. 22, p. 474-477. Voici comment il parle du théorème de Jacobi : « Meine Theoreme nicht wie das Jacobi'sche *aus der Luft gefallen erscheinen*, sondern in Zusammenhang mit dem Vorgehenden sich wie von selbst ergeben » (1853). La méthode de Meyer n'est pas aussi naturelle qu'il semble le dire. Rien ne détermine le choix de la fonction φ.

à l'avancement de la nouvelle doctrine. D'autre part, Liouville était arrivé à une théorie des fonctions doublement périodiques indépendamment des recherches de Cauchy. Briot et Bouquet appliquèrent l'ensemble des propriétés trouvées par ces géomètres aux fonctions elliptiques en y ajoutant le résultat de leurs propres études. Ils exposèrent la théorie de ces transcendantes avec une simplicité qui mit bien en évidence que la double périodicité en constituait la propriété fondamentale. Dans la question de la transformation ils cherchent d'abord les transformations simples qui se rapportent au nombre deux et à un nombre impair. Pour cela, ils déterminent les facteurs des formules de la transformation au moyen des zéros et des infinis de la fonction transformée; les produits trouvés ont les mêmes périodes que les fonctions cherchées et, d'après la théorie des fonctions doublement périodiques, ils n'en diffèrent que par un facteur constant. Ils démontrent ensuite que les transformations générales peuvent se ramener à ces transformations simples(1).

16. Tels sont les principaux écrits publiés sur la multiplication et la transformation qui ont quelque analogie avec notre propre travail. Nous avons dû nous borner pour chacun d'eux à en exposer l'idée fondamentale; mais, dans presque tous, et surtout dans ceux des illustres fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques, on rencontre une foule de vues remarquables qui mériteraient une exposition détaillée. Plaise à Dieu que quelque jour, un géomètre éminent, élévant à la nouvelle théorie créée par Jacobi, Abel et Cauchy un monument semblable à celui que Legendre a consacré à l'ancienne, y donne la place qui leur est due, à tant d'idées ingénieuses ou profondes que nous avons dû passer sous silence.

---

(1) Cauchy. *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, Paris, Debure, 1825; *Comptes rendus*, 1846, 1851, 1854-1857; Hermite, *Comptes rendus*, 1851; Puiseux. *Recherches sur les fonctions algébriques* (*J. de Liouville*, t. 15, p. 365; 16, p. 228). Liouville (*Journal de Liouville*, t. 20, p. 203; Briot et Bouquet. *Théorie, etc.*, ou *Jounal de l'école polytechnique*, cah. XXXVI.

THÉORIE DE LA MULTIPLICATION

ET

DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

NOTATIONS ET FORMULES PRÉLIMINAIRES.

NOTATIONS.

Soit

$$\varepsilon = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Nous posons, avec Abel et Briot et Bouquet,

$$x = \lambda = \lambda\varepsilon = \lambda(\varepsilon, k),$$
$$\sqrt{1-x^2} = \mu = \mu\varepsilon = \mu(\varepsilon, k),$$
$$\sqrt{1-k^2x^2} = \nu = \nu\varepsilon = \nu(\varepsilon, k),$$

en employant les notations les plus simples quand cela ne nuit pas à la clarté. Ensuite nous écrivons :

$$\lambda' = \lambda'\varepsilon = \lambda'(\varepsilon, k), \text{ au lieu de } \frac{d\lambda(\varepsilon, k)}{d\varepsilon}$$

$$\lambda' u = \lambda'(u, k), \text{ au lieu de } \frac{d\lambda(u, k)}{du}$$

u désignant une fonction quelconque de ε. Ainsi, d'après cette notation,

$$\lambda'(n\varepsilon) = \frac{d\lambda(n\varepsilon)}{d(n\varepsilon)} = \frac{1}{n}\frac{d\lambda(n\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

La même convention subsiste pour les fonctions μ et ν.

Nous désignons, à l'exemple de Jacobi, les intégrales complètes de première espèce par des lettres majuscules correspondant aux lettres minuscules qui représentent les modules. Ainsi, soient

$$k^2+k'^2=1, \qquad l^2+l'^2=1.$$

Nous poserons :

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \qquad L=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-l^2y^2}}.$$

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}} \qquad L'=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-l'^2y^2}}.$$

DÉRIVÉES DES PREMIÈRES ET SECONDES DE λ, μ, ν.

$$\lambda'=+\mu\nu, \qquad \mu'=-\lambda\nu, \qquad \nu'=-k^2\lambda\mu, \qquad (1).$$

$$\lambda''=-\lambda(1+k^2-2k^2\lambda^2), \quad \mu''=\mu(-1+2k^2-2k^2\mu^2), \quad \nu''=\nu(2-k^2-2\nu^2) \quad (2).$$

Les dérivées secondes λ'', μ'', ν'' sont donc respectivement des fonctions impaires de λ, μ, ν.

VALEURS DE λ, μ, ν POUR UN ARGUMENT NÉGATIF OU IMAGINAIRE.

$$\lambda(-\varepsilon)=-\lambda\varepsilon;\ \lambda(\varepsilon\sqrt{-1},k)=\frac{\lambda(\varepsilon,k')}{\mu(\varepsilon,k')}\sqrt{-1} \qquad (3).$$

$$\mu(-\varepsilon)=\mu\varepsilon;\ \mu(\varepsilon\sqrt{-1},k)=\frac{1}{\mu(\varepsilon,k')} \qquad (4).$$

$$\nu(-\varepsilon)=\nu\varepsilon;\ \nu(\varepsilon\sqrt{-1},k)=\frac{\nu(\varepsilon,k')}{\mu(\varepsilon,k')} \qquad (5).$$

DOUBLE PÉRIODICITÉ ; ZÉROS ET INFINIS DES FONCTIONS λ, μ, ν.

$$\lambda(\varepsilon+2aK+2bK'\sqrt{-1})=(-1)^a\lambda\varepsilon \qquad (6).$$

$$\mu(\varepsilon+2aK+2bK'\sqrt{-1})=(-1)^{a+b}\mu\varepsilon \qquad (7).$$

$$\nu(\varepsilon+2aK+2bK'\sqrt{-1})=(-1)^b\nu\varepsilon \qquad (8).$$

Ces formules restent vraies si on remplace λ, μ, ν par leurs dérivées

d'ordre quelconque. Ensuite, a et b représentant deux nombres entiers quelconques,

$$\lambda(0) = 0;\quad \lambda(2a\mathrm{K} + 2b\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = 0 \qquad (9).$$

$$\mu(\mathrm{K}) = 0;\quad \mu[(2a+1)\mathrm{K} + 2b\mathrm{K}'\sqrt{-1}] = 0 \qquad (10).$$

$$\nu(\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1}) = 0;\quad \nu[(2a+1)\mathrm{K} + (2b+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}] = 0 \qquad (11).$$

$$\lambda, \mu, \text{ ou } \nu(\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \infty;\quad \lambda, \mu \text{ ou } \nu[2a\mathrm{K} + (2b+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}] = \infty \qquad (12).$$

VALEURS DE λ, μ, ν POUR LES COMPLÉMENTS DES ARGUMENTS.

Dans les formules suivantes, si le signe $\pm$ se trouve dans les deux membres d'une égalité, les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

$$\lambda(\mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = \pm \frac{1}{k\lambda\varepsilon} \qquad (13).$$

$$\mu(\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = -\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}\,\frac{1}{\mu\varepsilon} \qquad (14).$$

$$\nu(\mathrm{K} \pm \varepsilon) = \frac{k'}{\nu\varepsilon} \qquad (15).$$

$$\mu(\mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = \pm\sqrt{-1}\,\frac{\nu\varepsilon}{k\lambda\varepsilon} \quad (16). \qquad \nu(\mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = \pm\sqrt{-1}\,\frac{\mu\varepsilon}{\alpha\varepsilon} \quad (17).$$

$$\nu(\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = \pm\sqrt{-1}\,\frac{k'\lambda\varepsilon}{\mu\varepsilon} \quad (18). \qquad \lambda(\mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} \pm \varepsilon) = \frac{1}{k}\,\frac{\nu\varepsilon}{\mu\varepsilon} \quad (19).$$

$$\lambda(\mathrm{K} \pm \varepsilon) = \frac{\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon} \quad (20). \qquad \mu(\mathrm{K} \pm \varepsilon) = k'\frac{\lambda\varepsilon}{\nu\varepsilon} \quad (21).$$

VALEURS DE λ, μ, ν POUR L'ARGUMENT $\alpha + \beta$ OU THÉORÈME DE L'ADDITION.

$$\lambda(\alpha + \beta) = \frac{\lambda\alpha\lambda'\beta + \lambda'\alpha\lambda\beta}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\lambda\alpha\mu\beta\nu\beta + \lambda\beta\mu\alpha\nu\alpha}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\lambda^2\alpha - \lambda^2\beta}{\lambda\alpha\mu\beta\nu\beta - \lambda\beta\mu\alpha\nu\alpha} \qquad (22).$$

$$\mu(\alpha + \beta) = \frac{\mu\alpha\mu\beta - \mu'\alpha\mu'\beta}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\mu\alpha\mu\beta - \lambda\alpha\nu\alpha\lambda\beta\nu\beta}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \nu^2\alpha\,\frac{\lambda^2(\alpha + \mathrm{K}) - \lambda^2\beta}{\mu\alpha\mu\beta + \lambda\alpha\nu\alpha\lambda\beta\nu\beta} \qquad (23).$$

$$\nu(\alpha + \beta) = \frac{\nu\alpha\nu\beta - \frac{1}{k^2}\nu'\alpha\nu'\beta}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\nu\alpha\nu\beta - k^2\lambda\alpha\mu\alpha\lambda\beta\mu\beta}{1 - k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = k^2\mu^2\alpha\,\frac{\lambda^2(\alpha + \mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1}) - \lambda^2\beta}{\nu\alpha\nu\beta + k^2\lambda\alpha\mu\alpha\lambda\beta\mu\beta} \qquad (24)$$

$$\lambda(\alpha+\beta)\,\lambda(\alpha-\beta) = \frac{\lambda^2\alpha-\lambda^2\beta}{1-k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{1}{k^2\lambda^2\alpha}\cdot\frac{\lambda^2\alpha-\lambda^2\beta}{\lambda^2(\alpha+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta} \quad (25).$$

$$\mu(\alpha+\beta)\,\mu(\alpha-\beta) = \frac{\mu^2\alpha-\lambda^2\beta\nu^2\alpha}{1-k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\nu^2\alpha}{k^2\lambda^2\alpha}\cdot\frac{\lambda^2(\alpha+K)-\lambda^2\beta}{\lambda^2(\alpha+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta} \quad (26).$$

$$\nu(\alpha+\beta)\,\nu(\alpha-\beta) = \frac{\nu^2\alpha-k^2\lambda^2\beta\mu^2\alpha}{1-k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\mu^2\alpha}{\lambda^2\alpha}\cdot\frac{\lambda^2(\alpha+K+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta}{\lambda^2(\alpha+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta} \quad (27).$$

$$[1\pm\lambda(\beta+\alpha)][1\pm\lambda(\beta-\alpha)] = \frac{[\mu\alpha\pm\lambda\beta\nu\alpha]^2}{1-k^2\lambda^2\alpha\lambda^2\beta} = \frac{\nu^2\alpha}{k^2\lambda^2\alpha}\cdot\frac{[\lambda(\alpha+K)\pm\lambda\beta]^2}{\lambda^2(\alpha+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta} \quad (28).$$

$$[1\pm k\lambda(\beta+\alpha)][1\pm k\lambda(\beta-\alpha)] = \frac{[\nu\alpha\pm k\lambda\beta\mu\alpha]^2}{1-k^2\lambda^2\alpha\,\lambda^2\beta} = \frac{\mu^2\alpha}{\lambda^2\alpha}\cdot\frac{[\lambda(\alpha+K+K'\sqrt{-1})\pm\lambda\beta]^2}{\lambda^2(\alpha+K'\sqrt{-1})-\lambda^2\beta} \quad (29).$$

LIMITES DE QUELQUES EXPRESSIONS QUI PRENNENT UNE FORME INDÉTERMINÉE.

Soit $\varepsilon = 2aK + (2b+1)K'\sqrt{-1}$, $\lambda\varepsilon$, $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$ sont infinis.
On trouve :

$$\lim\frac{\lambda'\varepsilon}{\lambda^2\varepsilon} = \lim \frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda^2\varepsilon} = -(-1)^a k \quad (30).$$

$$\lim\frac{\mu'\varepsilon}{\mu^2\varepsilon} = \lim\left[-\frac{\lambda\varepsilon\nu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon}\right] = -(-1)^{a+b}\sqrt{-1}\cdot k \quad (31).$$

$$\lim\frac{\nu'\varepsilon}{\nu^2\varepsilon} = \lim\left[-\frac{k^2\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}{\nu^2\varepsilon}\right] = -(-1)^b\sqrt{-1} \quad (32).$$

Pour la démonstration de ces formules nous renvoyons aux traités des fonctions elliptiques ou aux *Fundamenta* de Jacobi, § 18 et 20, où on les trouvera pour la plupart, au moins sous une des formes indiquées. Les formules (25-30) ont été mises sous une forme qui est à la fois la plus commode pour l'usage que nous en ferons, et pour la mise en lumière des analogies qui existent entre les trois fonctions.

Dans la suite, pour renvoyer à l'une de ces formules nous écrivons la lettre I, suivie du nombre qui désigne la formule.

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA MULTIPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

1. Dans la multiplication des fonctions elliptiques, on cherche l'expression de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ en fonction de $\lambda\varepsilon$, $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$, n étant un nombre entier positif. Avant d'aborder cette recherche, nous allons démontrer deux théorèmes qui nous permettent d'assigner immédiatement la forme de la relation qui existe entre $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ et $\lambda\varepsilon$, $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$. Nous nous occuperons ensuite de la multiplication dans le cas où n est impair, puis dans le cas où n est pair.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

2. Théorème I. — *Si n est impair,* $\lambda(n\varepsilon):\lambda\varepsilon$, $\mu(n\varepsilon:\mu\varepsilon$, $\nu(n\varepsilon):\nu\varepsilon$ *et si n est pair,* $\lambda(n\varepsilon):\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\varepsilon$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ *sont des fonctions rationnelles paires de* $\lambda\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ *ou* $\nu\varepsilon$.

Ce théorème est vrai pour $n=1$ et $n=2$, comme il résulte des formules 22, 23, 24 de l'introduction. Nous allons montrer, en nous bornant à la fonction λ, que s'il existe pour le nombre n, il existe aussi pour le nombre $n+1$. Dans la démonstration suivante, $I_1(\lambda\varepsilon)$, $I_2(\lambda\varepsilon)$ etc. désignent des fonctions rationnelles impaires de $\lambda\varepsilon$, $J(\lambda\varepsilon)$ une fonction rationnelle paire de la même variable.

D'après la formule (I, 22),

$$\lambda(n+1)\varepsilon = \frac{\lambda(n\varepsilon)\lambda'\varepsilon + \lambda\varepsilon\lambda'(n\varepsilon)}{1 - k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2(n\varepsilon)}.$$

Soit n pair. On a alors par hypothèse :

$$\lambda(n\varepsilon) = I_1(\lambda\varepsilon)\mu\varepsilon\nu\varepsilon = I_1(\lambda\varepsilon)\lambda'\varepsilon,$$

d'où

$$n\lambda'(n\varepsilon) = \frac{dI_1(\lambda\varepsilon)}{d(\lambda\varepsilon)}\lambda'^2\varepsilon + I_1(\lambda\varepsilon)\lambda''\varepsilon.$$

D'après (I, 2), $I_1(\lambda\varepsilon)\lambda''\varepsilon$ est une fonction paire de $\lambda\varepsilon$; la dérivée d'une fonction impaire d'une variable étant toujours une fonction paire de cette variable,

$$\frac{dI_1(\lambda\varepsilon)}{d(\lambda\varepsilon)}\lambda'^2\varepsilon = \frac{dI_1(\lambda\varepsilon)}{d(\lambda\varepsilon)}\mu^2\varepsilon\nu^2\varepsilon$$

est aussi une fonction paire de $\lambda\varepsilon$. Donc

$$\lambda\varepsilon\,\lambda'(n\varepsilon) = I_2(\lambda\varepsilon)$$

et

$$\lambda(n+1)\varepsilon = \frac{I_1(\lambda\varepsilon)\cdot\lambda'^2\varepsilon + I_2(\lambda\varepsilon)}{1 - k^2\lambda^2 I_1^2(\lambda\varepsilon)\cdot\lambda'^2\varepsilon} = I_3(\lambda\varepsilon).$$

Ainsi, quand $\lambda(n\varepsilon)$ est de forme $I_1(\lambda\varepsilon)\lambda'\varepsilon$, $\lambda(n+1)\varepsilon$ est de la forme $I_3(\lambda\varepsilon)$.

Soit en second lieu, n impair. Par hypothèse

$$\lambda(n\varepsilon) = I_4(\lambda\varepsilon)$$

d'où

$$n\lambda'(n\varepsilon) = n\frac{dI_4(\lambda\varepsilon)}{d(\lambda\varepsilon)}\lambda'\varepsilon = J(\lambda\varepsilon)\cdot\lambda'\varepsilon$$

et

$$\lambda(n+1)\varepsilon = \frac{I_4(\lambda\varepsilon)\lambda'\varepsilon + \lambda\varepsilon\cdot J(\lambda\varepsilon)\lambda'\varepsilon}{1 - k^2\lambda^2\varepsilon\, I_4^2(\lambda\varepsilon)} = I_5(\lambda\varepsilon)\lambda'\varepsilon.$$

Ainsi, quand $\lambda(n\varepsilon)$ est de la forme $I_4(\lambda\varepsilon)$, $\lambda(n+1)\varepsilon$ est de la forme $I_5(\lambda\varepsilon)\cdot\lambda'\varepsilon$.

Il est clair d'ailleurs que, dans cette démonstration, les fonctions I_2, I_3, J, I_5 sont rationnelles comme I_1 et I_4 d'où on les déduit(1).

---

(1) Ce théorème est dû à Abel, *Œuvres*, t. I, XII, n° 3, p. 155. Sa démonstration est peut-être plus simple que la nôtre, mais celle-ci se présente plus naturellement à l'esprit. On peut voir le germe de la démonstration d'Abel dans un passage d'Euler (voir Introduction). Gudermann, *Theorie der Modular Functionen und der Modular Integrale* (Berlin, Reimer, 1844 ou *Journal de Crelle*, t. 18, 19, 20, 21, 23, 25), § 149, p. 292, a reproduit la démonstration d'Abel. — Abel, I, XXI, chap. Ier, § 4, p. 348, a donné une seconde démonstration du même théorème, beaucoup meilleure, parce qu'elle fournit la valeur de $\lambda(n\varepsilon)$ sous forme de fraction rationnelle irréductible. On trouve cette démonstration dans les ouvrages suivants : Sanio, *De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione quae ad numerum parem pertinent* (*Journal de Crelle*, t. XIV, p. 1-30, 1835), § 1, p. 6; U. H. Meyer, *Sur les fonctions elliptiques* (*Archives de Grunert*, 1851, t. XVI, p. 364-408); Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques* (Paris, Mallet-Bachelier, 1859), § 180, p. 213; Broch, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* (Christiania, Malling, 1867), § 26, p. 47; Königsberger, *Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen* (Leipzig, Teubner, 1868), § 29, p. 119.

3. Théorème II. — *Les fractions rationnelles qui donnent $\lambda(n\varepsilon)$ ou $\lambda(n\varepsilon):\lambda'\varepsilon$, selon que n est impair ou pair, en fonction de $\lambda\varepsilon$, $\mu(n\varepsilon)$ en fonction de $\mu\varepsilon$, $\nu(n\varepsilon)$ en fonction de $\nu\varepsilon$, ont leur numérateur et leur dénominateur égaux à des produits de facteurs simples, si on les suppose réduites à leur plus simple expression.*

Nous allons donner la démonstration de cet important théorème pour la fonction $\lambda(n\varepsilon)$. Soit d'abord n impair. Nous savons par le numéro précédent que l'on peut écrire

$$\lambda(n\varepsilon) = m\lambda\varepsilon \frac{P(\lambda^2\varepsilon - A^2)}{P(\lambda^2\varepsilon - D_1^2)}.$$

m, A, D sont des constantes; P, placé devant un facteur, indique un produit de facteurs semblables, différant seulement entre eux par la valeur de la constante. Pour montrer qu'un facteur quelconque du numérateur $\lambda\varepsilon \pm A$ est simple, nous chercherons la limite de

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon \pm A}$$

pour $\lambda\varepsilon = \mp A$. Or, dans cette hypothèse, cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$. Par conséquent, on a

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon \pm A} = \lim \frac{n\lambda'(n\varepsilon)}{\lambda'\varepsilon} = \lim n\frac{\mu(n\varepsilon)\nu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon\cdot\nu\varepsilon}.$$

Les fonctions λ, μ, ν ne sont jamais nulles en même temps et sont toujours infinies à la fois. Il en résulte que le numérateur et le dénominateur de l'expression précédente sont finies; la limite de $\lambda(n\varepsilon) : (\lambda\varepsilon \pm A)$ étant finie, il est clair que $\lambda\varepsilon \pm A$ est un facteur simple du numérateur de $\lambda(n\varepsilon)$. Cette démonstration s'applique au cas où $A = 0$, et par conséquent $\lambda\varepsilon$ est aussi un facteur simple du numérateur.

La limite de $\lambda(n\varepsilon)(\lambda\varepsilon \pm D)$ est aussi finie pour $\lambda\varepsilon = \mp D$ et par conséquent $\lambda\varepsilon \pm D$ est un facteur simple du dénominateur. En effet,

$$\lim \lambda(n\varepsilon)(\lambda\varepsilon \pm D) = \lim \frac{\lambda\varepsilon \pm D}{\lambda^{-1}(n\varepsilon)} = -\lim \frac{\lambda'\varepsilon\cdot\lambda^2(n\varepsilon)}{n\lambda'(n\varepsilon)}.$$

D'après (I, 30) la limite de $\lambda^2(n\varepsilon) : \lambda'(n\varepsilon)$ pour $\lambda(n\varepsilon) = \infty$ est finie; $\lambda'\varepsilon = \mu\varepsilon\nu\varepsilon$ est fini, puisque $\lambda\varepsilon$ n'est pas infini. Donc la limite cherchée est finie.

Dans le cas où n est pair, on peut écrire

$$\lambda(n\varepsilon) = m\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\varepsilon \frac{P(\lambda^2\varepsilon - A^2)}{P(\lambda^2\varepsilon - D^2)};$$

la démonstration précédente est entièrement applicable. Nous montrerons

dans la suite qu'il ne se trouve ni au numérateur, ni au dénominateur de facteur $1 - \lambda^2\varepsilon = \mu^2\varepsilon$, ou $1 - k^2\lambda^2\varepsilon = \nu^2\varepsilon$, s'annulant en même temps que $\mu\varepsilon\nu\varepsilon$.

Ce théorème se démontre de la même manière pour les fonctions $\mu(n\varepsilon)$ et $\nu(n\varepsilon)$. Dans le cas où n est pair, on en conclut que tous les facteurs du numérateur et du dénominateur sont de la forme

$$\mu^2\varepsilon - B^2 \text{ dans l'expression de } \mu(n\varepsilon)$$
$$\nu^2\varepsilon - C^2 \text{ dans l'expression de } \nu(n\varepsilon)$$

B et C n'étant pas nuls. En effet, si on avait, par exemple, $B = 0$, on trouverait un facteur $\mu^2\varepsilon$, ce qui serait contraire au théorème démontré dans ce numéro; ou un facteur $\mu\varepsilon$, ce qui serait contraire au théorème premier (1).

CHAPITRE II.

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE IMPAIR.

§ 1. *Formules fondamentales*

4. *Valeur de* $\lambda(n\varepsilon)$. Nous savons que la valeur de $\lambda(n\varepsilon)$ peut être mise sous la forme

$$\lambda(n\varepsilon) = m_1 \lambda\varepsilon \frac{P(\lambda^2\varepsilon - A^2)}{P(\lambda\varepsilon^2 - D_1^2)}.$$

Nous allons chercher successivement la constante m_1, les facteurs du numérateur, puis ceux du dénominateur.

---

(1) Gudermann admet sans démonstration que les facteurs sont simples ; sur ce point comme sur beaucoup d'autres, il faut le compléter au moyen de la théorie des fonctions doublement périodiques. Les autres auteurs traitent du degré de multiplicité des facteurs seulement après les avoir trouvés. La méthode d'Abel est fondée sur la théorie des racines égales; la plupart des autres, s'appuyant sur la seconde démonstration d'Abel du théorème premier, déterminent d'avance le degré du numérateur et du dénominateur; trouvant ensuite un nombre de facteurs du premier degré égal à ce degré, ils en concluent que chaque facteur est simple. Briot et Bouquet emploient le célèbre théorème de Liouville : Deux fonctions monodromes et monogènes qui admettent les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré de multiplicité sont égales à un facteur constant près. (*Théorie*, § 39, p. 39; *Journal de Liouville*, XX, 1855, p. 203 sq.)

Pour plus de détails sur ces diverses méthodes et en général sur tout ce qui ne peut être comparé directement à ce que nous donnons dans le texte, consultez l'Introduction historique.

1° *Détermination de la constante* m_1. — Fesons $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, $\lambda\varepsilon$ et $\lambda(n\varepsilon)$ deviendront infinis. Mais le rapport $\lambda(n\varepsilon) : \lambda\varepsilon$ restera fini. En effet :

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = \lim \frac{\lambda^{-1}\varepsilon}{\lambda^{-1}(n\varepsilon)} = \lim \left[\frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda^2\varepsilon} : \frac{n\mu(n\varepsilon)\nu(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon)}\right] = \frac{1}{n} \quad \text{(I, n° 30).}$$

Le produit $P(\lambda^2\varepsilon - A^2)$ contient donc le même nombre de facteurs du premier degré que $P(\lambda^2\varepsilon - D_1^2)$, et on a encore, pour $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$,

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = m_1.$$

Par conséquent $m_1 = \frac{1}{n}$.

2° *Détermination des facteurs du numérateur.* — La fonction $\lambda(n\varepsilon)$ ne s'annule que pour

$$n\varepsilon = 2aK + 2bK'\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n},$$

a et b étant des nombres entiers quelconques. Pour cette valeur de ε, l'un des facteurs du produit $P(\lambda^2\varepsilon - A^2)$ doit s'annuler; la forme générale de ces facteurs est donc

$$\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right).$$

Pour trouver toutes les expressions distinctes contenues dans cette formule générale, nous allons montrer qu'il suffit de donner à a et b un nombre de valeurs très restreint. D'abord on peut supposer a et b plus petits que n en valeur absolue. Car soient : $a' = pn + a''$, $b' = qn + b''$, a'' et b'' étant inférieurs à n en valeur absolue; on aura :

$$\lambda^2\left(\frac{2a'K + 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(2pK + 2qK'\sqrt{-1} + \frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) =$$
$$= \lambda^2\left(\frac{2a''K + 2b''K'\sqrt{-1}}{n}\right).$$

Le facteur correspondant à a' et b' est donc égal au facteur correspondant à a'' et b'', et, par conséquent, il n'y pas lieu de supposer a et b plus grands que n, en valeur absolue.

Soit $a = 0$. Dans ce cas

$$\lambda^2\left(\frac{2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(-\frac{2bK'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

$$\lambda^2\left(\frac{2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(2K'\sqrt{-1} - \frac{2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left[\frac{2(n-b)K'\sqrt{-1}}{n}\right]$$

égalités d'où résulte qu'il est inutile de supposer b négatif ou positif et supérieur à $\frac{n}{2}$. Ainsi, quand $2a = 0$, il suffit de supposer $2b$ égal à $2, 4, 6 \ldots\ldots n-1$.

On prouve de même que, si $2b = 0$, il suffit de supposer $2a$ égal à $2, 4, 6 \ldots\ldots n-1$.

Soient enfin $2a$ et $2b$ différents de 0. On peut toujours ajouter n à a sans altérer la valeur de $\lambda^2(2aK + 2bK'\sqrt{-1})$, car

$$\lambda^2\left[\frac{2(a+pn)K + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right] = \lambda^2\left(2pK + \frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) =$$
$$= \lambda^2\left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right);$$

nous supposerons donc a positif. On peut de même retrancher n de a, et, par conséquent, supposer a plus petit que n. On peut aussi supposer b positif et inférieur à n.

Soit maintenant $a' = n - a''$, $b' = n - b''$; on aura (I, 6)

$$\lambda^2\left(\frac{2a'K + 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(2K - \frac{2a''K - 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(\frac{2a''K - 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

$$\lambda^2\left(\frac{2a'K + 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(2K + 2K'\sqrt{-1} - \frac{2a''K + 2b''K'\sqrt{-1}}{n}\right) =$$
$$= \lambda^2\left(\frac{2a''K + 2b''K'\sqrt{-1}}{n}\right).$$

D'après ces deux formules, on peut supposer que a reçoive seulement des valeurs inférieures à $\frac{n}{2}$; en outre, on peut faire en sorte que b soit compris entre $+\frac{n}{2}$ et $-\frac{n}{2}$. Autrement dit, si $2a = 2, 4, 6 \ldots\ldots$ ou $n-1$, il suffit de supposer $2b$ égal à $\pm 2, \pm 4 \ldots\ldots$ ou $\pm(n-1)$.

Les facteurs correspondants aux valeurs de a et b que nous venons d'indiquer sont tous différents. Car soit, s'il est possible :

$$\lambda^2\left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda^2\left(\frac{2a'K + 2b'K'\sqrt{-1}}{n}\right),$$

On devra avoir (I, 6)

$$\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n} = \pm \frac{2a'K + 2b'K'\sqrt{-1}}{n} + 2pK + 2qK'\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire : $a = \pm a' + pn, \quad b = \pm b' + qn,$

ce qui est impossible, car a, a', b, b' sont inférieurs à $\frac{n}{2}$ en valeur absolue.

Le numérateur de $\lambda(n\varepsilon)$ peut être écrit, à un facteur constant près, d'après ce qui précède :

$$\lambda\varepsilon P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n}\right)\right]$$

où l'on suppose que a et b reçoivent les valeurs suivantes :

$2a = 0$ et $2b = 2, 4, 6\ldots \quad (n-1)$
$2b = 0$ et $2a = 2, 4, 6\ldots \quad (n-1)$
$2a = 2, 4\ldots \quad (n-1)$, et $2b = \pm 2, \pm 4, \pm 6\ldots \quad \pm(n-1)$.

3° *Détermination des facteurs du dénominateur.* — Une discussion analogue conduit à la valeur suivante pour le dénominateur :

$$P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\left(\frac{2aK + (2b+1)K'\sqrt{-1}}{n}\right)\right];$$

on suppose que a et b reçoivent les valeurs

$2a = 0$ et $2b + 1 = 1, 3, 5,\ldots \quad n-2$
$2b + 1 = n$ et $2a = 2, 4, 6,\ldots \quad n-1$
$2a = 0, 2, 4,\ldots \quad (n-1)$ et $2b+1 = \pm 1, \pm 3,\ldots \quad \pm(n-2)$.

On peut aussi arriver à ce résultat de la manière suivante. Les facteurs du dénominateur sont tous de la forme

$$\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\left[\frac{2a'K + (2b'+1)K'\sqrt{-1}}{n}\right]$$

Soit $a' = 2n - a''$, $2b' + 1 = n - 2b''$. On aura (I, 6, 13)

$$\lambda^2\left[\frac{2a'K + (2b'+1)K'\sqrt{-1}}{n}\right] = \lambda^2\left(K'\sqrt{-1} - \frac{2a''K + 2b''K'\sqrt{-1}}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{k^2\lambda^2\left(\frac{2a''K + 2b''K'\sqrt{-1}}{n}\right)}.$$

Pour obtenir toutes les valeurs distinctes de cette dernière expression,

il suffira de donner à a'' et b'' les valeurs que reçoivent a et b dans l'expression du numérateur. Toutefois on ne pourra pas faire $a''=0$, $b''=0$, parce que le facteur correspondant est infini. Néanmoins $\lambda(n\varepsilon)=\infty$, car, dans ce cas, $2a''=2n$, $2b'+1=n$, $\varepsilon=2K+K'\sqrt{-1}$ et par conséquent tous les facteurs du numérateur et du dénominateur de $\lambda(n\varepsilon)$ sont infinis; comme le numérateur en contient un de plus que le dénominateur, l'expression de $\lambda(n\varepsilon)$ est donc infinie. Aux valeurs indiquées pour a'' et b'' correspondent les valeurs assignées ci-dessus à $2a$ et $2b+1$, dans l'expression du dénominateur.

Il résulte encore de ce qui précède que l'on peut écrire pour le dénominateur :

$$P\left[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\left(K'\sqrt{-1}-\frac{2aK+2bK'\sqrt{-1}}{n}\right)\right].$$

$2a$ et $2b$ ayant les mêmes valeurs que dans le numérateur.

4° *Expression de* $\lambda(n\varepsilon)$. — Nous aurons pour valeur de $\lambda(n\varepsilon)$:

$$\lambda(n\varepsilon)=\frac{1}{n}\lambda\varepsilon P\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_4}=\frac{1}{n}\lambda\varepsilon P\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}-\rho_1)}.$$

En supposant que

$$\rho_1=\frac{sK+s'K'\sqrt{-1}}{n},\qquad \rho_4=\frac{sK+\sigma'K'\sqrt{-1}}{n}$$

s et s' étant des nombres pairs; σ' un nombre impair; s et s' reçoivent toutes les valeurs paires non supérieures à n; toutefois on ne doit jamais associer les valeurs, 0, 0 ou 0 et n; de plus s' et σ' ont le double signe chaque fois qu'ils ne sont ni égaux, ni associés à 0 ou n.

Dans la suite nous emploierons toujours s pour désigner un nombre pair, σ un nombre impair positif, et les mêmes lettres accentuées pour désigner un nombre pair ou impair qui peut être positif ou négatif dans certains cas (1).

On reconnait aisément que le numérateur de $\lambda(n\varepsilon)$ est du degré n^2, et

(1) Ces notations expressives sont une combinaison de celles qui sont employées par Sanio et Gudermann. Faute de notations abrégées analogues, la lecture du chapitre de Broch sur la multiplication est rendue très-pénible. — On nous pardonnera l'emploi de l'expression impropre *nombre négatif*, en songeant que l'on a déjà admis dans l'arithmétique supérieure, des *nombres complexes* et *idéaux* qui sont tout aussi peu des nombres que les *nombres négatifs*.

le dénominateur de degré n^2-1 en $\lambda\varepsilon$, ce qui s'accorde avec le théorème du n° 2, et avec la remarque faite à propos de la constante. On en conclut que les numérateurs de $\lambda^2(n\varepsilon)$, $\mu^2(n\varepsilon)$, $\nu^2(n\varepsilon)$, sont de degré n^2 et le dénominateur de degré n^2-1 en $\lambda^2\varepsilon$, $\mu^2\varepsilon$ ou $\nu^2\varepsilon$. Par conséquent $\mu(n\varepsilon)$ et $\nu(n\varepsilon)$ ont leur numérateur de degré n^2 en $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$, leur dénominateur de degré $n-1$, ce qui s'accorde avec le n° 2, et avec ce que nous allons voir dans la détermination de la constante de l'expression de $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$.

5. *Valeur de* $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$. Les valeurs de $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ sont de la forme

$$\mu(n\varepsilon)=m_2\mu\varepsilon\frac{\mathrm{P}(\mu^2\varepsilon-\mathrm{B}^2)}{\mathrm{P}(\mu^2\varepsilon-\mathrm{D}_2^2)}$$

$$\nu(n\varepsilon)=m_3\nu\varepsilon\frac{\mathrm{P}(\nu^2\varepsilon-\mathrm{C}^2)}{\mathrm{P}(\nu^2\varepsilon-\mathrm{D}_3^2)}$$

Cherchons d'abord la limite de $\mu(n\varepsilon):\mu\varepsilon$, $\nu(n\varepsilon):\nu\varepsilon$ pour $\varepsilon=\mathrm{K}'\sqrt{-1}$. On trouve (I, 31 et 32) :

$$\lim\frac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon}=\lim\frac{\mu^{-1}\varepsilon}{\mu^{-1}(n\varepsilon)}=\lim\frac{\lambda\varepsilon\nu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon}:\lim\frac{n\lambda(n\varepsilon)\,\nu(n\varepsilon)}{\mu^2(n\varepsilon)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}=m_2$$

$$\lim\frac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon}=\lim\frac{\nu^{-1}\varepsilon}{\nu^{-1}(n\varepsilon)}=\lim\frac{\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}{\nu^2\varepsilon}:\lim\frac{n\lambda(n\varepsilon)\,\mu(n\varepsilon)}{\nu^2(n\varepsilon)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}=m_3$$

La fonction $\mu(n\varepsilon)$ s'annule pour

$$\varepsilon=\frac{(2a+1)\mathrm{K}+2b\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}=\mathrm{K}-\frac{2a'\mathrm{K}+2b'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

si $2a+1=n-2a'$ et $2b=2n-2b'$.

La fonction $\nu(n\varepsilon)$ s'annule pour

$$\varepsilon=\frac{(2a+1)\mathrm{K}+(2b+1)\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}=\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\frac{2a'\mathrm{K}+2b'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}$$

si $2a+1=n-2a'$, $2b+1=n-2b'$.

Enfin ces deux fonctions deviennent infinies pour les mêmes valeurs que $\lambda(n\varepsilon)$. On conclut de là, soit par un raisonnement direct, soit en faisant des remarques analogues à celles qui nous ont donné la seconde forme du dénominateur de $\lambda(n\varepsilon)$, que, si

$$\rho_2=\frac{\sigma\mathrm{K}+s'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}\qquad\rho_3=\frac{\sigma\mathrm{K}+\sigma'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}$$

$$\mu(n\varepsilon)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\mu\varepsilon\,\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_2}{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_4}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\mu\varepsilon\,\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2(\mathrm{K}-\rho_1)}{\mu^2\varepsilon-\mu^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\rho_1)}$$

$$\nu(n\varepsilon)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\nu\varepsilon\,\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_3}{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_4}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\nu\varepsilon\,\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\rho_1)}{\nu^2\varepsilon-\nu^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\rho_1)}$$

σ, s', σ', pouvant recevoir un certain nombre de valeurs d'après la règle indiquée à la fin du numéro précédent.

6. *Expression de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ *respectivement au moyen de* $\mu\varepsilon$ et $\nu\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$ et $\nu\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$ et $\mu\varepsilon$. On a, d'après la définition des fonctions μ et ν,

$$\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\alpha}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\beta}=\frac{1-\lambda^2\varepsilon-1+\lambda^2\alpha}{1-\lambda^2\varepsilon-1+\lambda^2\beta}=\frac{1-k^2\lambda^2\varepsilon-1+k^2\lambda^2\alpha}{1-k^2\lambda^2\varepsilon-1+k^2\lambda^2\beta}=\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2\alpha}{\mu^2\varepsilon-\mu^2\beta}=\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2\alpha}{\nu^2\varepsilon-\nu^2\beta}$$

Il résulte de là que l'on peut écrire de la manière suivante les formules trouvées jusqu'à présent.

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{m_1\lambda\varepsilon}=\mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_1}{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_1}{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_4}$$

$$\frac{\mu(n\varepsilon)}{m_2\mu\varepsilon}=\mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_2}{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_2}{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_4}$$

$$\frac{\nu(n\varepsilon)}{m_3\nu\varepsilon}=\mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_3}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_3}{\mu^2\varepsilon-\mu^2\rho_4}=\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho^3}{\nu^2\varepsilon-\nu^2\rho_4}$$

Dans ces formules, on peut remplacer ρ_2 par $\mathrm{K}-\rho_1$, ρ_3 par $\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\rho_1$, ρ_4 par $\mathrm{K}'\sqrt{-1}-\rho_1$. On a trouvé pour les constantes les valeurs

$$m_1=\frac{1}{n},\qquad m_2=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\qquad m_3=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\qquad (1)$$

---

(1) Aucun auteur, que nous sachions, n'a établi directement ces formules, parce que tous ont déterminé les constantes par les procédés indiqués au § II au lieu d'employer la valeur $\varepsilon=\mathrm{K}\sqrt{-1}$. Abel, toutefois dans l'expression de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$, en sommes trouve les constantes par la valeur qui rend ces fonctions infinies, et cela tant dans son premier mémoire (I, XII § 23, p. 186 et sqq.) que dans le dernier (I, XXI, p. 397). Dans la théorie de la transformation il emploie tantôt la valeur $\varepsilon=\mathrm{K}\sqrt{-1}$, tantôt d'autres valeurs (I, XII, p. 236, et I, XIII, 265).

Quant à la détermination des facteurs du numérateur et du dénominateur, tous les auteurs partent au fond de la double périodicité. La méthode suivie dans le texte est

§ II. *Formules diverses déduites des formules fondamentales.*

7. *Autre méthode pour la détermination des constantes.* — Nous avons trouvé les constantes m_1, m_2, m_3, en fesant $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, de manière que $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ deviennent infinies. Cette valeur de ε est la seule par rapport à laquelle les trois fonctions se comportent de même. Mais il est évident que l'on peut déterminer m_1, m_2, m_3 en donnant à ε d'autres valeurs. On est conduit à des résultats remarquables en fesant dans les formules du numéro précédent $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = K$, $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$, valeurs qui annulent respectivement $\lambda\varepsilon$, $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$. On aura :

1° Pour $\varepsilon = 0$:

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = n = m_1 \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\rho_4} = \frac{1}{n}\mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\rho_4}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\rho_4} = n^2$$

$$\frac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = 1 = m_2 \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_2}{\lambda^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_2}{\lambda^2\rho_4}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_2}{\lambda^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

$$\frac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon} = 1 = m_3 \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_3}{\lambda^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{n}\mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_3}{\lambda^2\rho_4}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2\rho_3}{\lambda^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

---

absolument la même que celle de Sanio (dans le cas de n pair), de Gudermann (§ 150 et suivants p. 284) qui traite complètement la question, de Briot et Bouquet qui esquissent seulement la détermination de $\lambda(n\varepsilon)$ sans chercher les constantes. Abel suit une méthode un peu plus générale qui s'applique d'ailleurs aussi au cas de n pair (I, XII, n° 11, p. 186). Plus loin (n° 23, p. 186 et sqq.) il trouve en partant du même principe, la valeur de $\lambda(n\varepsilon)$ etc. sous une autre forme, d'où il déduit la première. Broch suit complétement Abel sur ce dernier point, et comme cette seconde méthode ne s'applique qu'au cas où n est pair, il est forcé de se borner aux formules se rapportant à n pair (§ 29, 30, 31, p. 58 et suivantes). U. H. Meyer (*Archives de Grunert*, t. XVI, p. 364 sq. § V) cherche par la première méthode d'Abel l'expression de $\left(1 - \frac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_1)}\right) : \left(1 - \frac{\lambda^2(n\varepsilon)}{\lambda^2(n\varepsilon_2)}\right)$ ce qui ne présente pas de difficultés. D'où en donnant à ε_1 et ε_2 des valeurs particulières $\lambda^2(n\varepsilon)$ etc. (Voir l'introduction.)

Tous ces auteurs à l'exception de Meyer et Briot et Bouquet déterminent la valeur des constantes ; nous dirons par quel procédé dans les notes du § II.

2° pour $\varepsilon = K$:

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = m_1 P\frac{\mu\rho_1}{\mu^2\rho_4} = \frac{1}{n} P\frac{\mu^2\rho_1}{\mu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\mu^2\rho_1}{\mu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

$$\lim \frac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = m_2 P\frac{\mu^2\rho_2}{\mu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} P\frac{\mu^2\rho_2}{\mu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\mu^2\rho_2}{\mu^2\rho_4} = n^2$$

$$\frac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon} = 1 = m_3 P\frac{\mu\rho_3}{\mu\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} P\frac{\mu^2\rho_3}{\mu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\mu^2\rho_3}{\mu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

3° pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$:

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = m_1 P\frac{\nu^2\rho_1}{\nu^2\rho_4} = \frac{1}{n} P\frac{\nu^2\rho_1}{\nu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\nu^2\rho_1}{\nu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

$$\frac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = 1 = m_2 P\frac{\nu^2\rho_2}{\nu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} P\frac{\nu^2\rho_2}{\nu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\nu^2\rho_2}{\nu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

$$\lim \frac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = m_3 P\frac{\nu^2\rho_3}{\nu^2\rho_4} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} P\frac{\nu^2\rho_3}{\nu^2\rho_4};\ \text{d'où}\ P\frac{\nu^2\rho_3}{\nu^2\rho_4} = n^2$$

Les formules de la dernière colonne se résument dans les suivantes :

$$n^2 = P\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\rho_4} = P\frac{\mu^2\rho_2}{\mu^2\rho_4} = P\frac{\nu^2\rho_3}{\nu^2\rho_4}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n = P\frac{\lambda^2\rho_2}{\lambda^2\rho_4} = P\frac{\lambda^2\rho_3}{\lambda^2\rho_4} = P\frac{\mu^2\rho_1}{\mu^2\rho_4} = P\frac{\mu^2\rho_3}{\mu^2\rho_4} = P\frac{\nu^2\rho_1}{\nu^2\rho_4} = P\frac{\nu^2\rho_2}{\nu^2\rho_4}$$

8. *Valeur des produits* $P\lambda^2\rho_1$, $P\lambda^2\rho_2 \cdots P\nu^2\rho_4$. — Lemme. *Si k est positif et plus petit que l'unité, le signe de $P\lambda^2\rho_1$ est celui de $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, tandis que $P\mu^2\rho_1$, $P\nu^2\rho_1$ sont positifs*(1).

On a, d'après la valeur de ρ_1,

$$P\lambda^2\rho_1 = P\lambda^2\left(\frac{sK}{n}\right).\quad \lambda^2\left(\frac{s'K'\sqrt{-1}}{n}\right).\quad \lambda^2\left(\frac{sK + s'K'\sqrt{-1}}{n}\right).\quad \lambda^2\left(\frac{sK - s'K'\sqrt{-1}}{n}\right).$$

---

(1) Ce lemme est emprunté à Gudermann (§ 152, p. 304), qui ne s'occupe guère que des fonctions elliptiques à module positif et plus petit que l'unité.

s et s' prenant dans le second membre, toutes les valeurs paires de 1 à $n-1$ Le produit de facteurs positifs $P\lambda^2\left(\frac{sK}{n}\right)$ est positif; si $\lambda^2\left(\frac{sK+s'K'\sqrt{-1}}{n}\right)$ est de la forme $a+b\sqrt{-1}$, $\lambda^2\left(\frac{sK-s'K'\sqrt{-1}}{n}\right)$ est de la forme $a-b\sqrt{-1}$, de sorte que $P\lambda^2\left(\frac{sK+s'K'\sqrt{-1}}{n}\right)\times\lambda^2\left(\frac{sK-s'K'\sqrt{-1}}{n}\right)$ est positif. Enfin, on a (I, n° 5)

$$\lambda^2\left(\frac{s'K'\sqrt{-1}}{n},\ k\right)=(-1)\,\frac{\lambda^2\left(\frac{s'K'}{n},\ k'\right)}{\mu^2\left(\frac{s'K'}{n},\ k'\right)},\ \text{quantité négative.}$$

Donc $$P\lambda^2\left(\frac{s'K'\sqrt{-1}}{n},k\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times \text{quantité positive.}$$

Ce produit donnant son signe à $P\lambda^2\rho_1$, il en résulte que celui-ci a le même signe que $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

On démontre de la même manière que $P\mu^2\rho_1$ et $P\nu^2\rho_1$ sont toujours positifs.

Cela établi, nous pouvons passer à la détermination des produits $P\lambda^2\rho_1$ etc. Nous avons d'après le n° précédent et (I, 13), si $2N=n^2-1$:

$$n^2=P\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2\rho_4}=P\frac{\lambda^2\rho_1}{\lambda^2(K'\sqrt{-1}-\rho_1)}=P(k^2\lambda^4\rho_1)=k^{2N}P\lambda^4\rho_1.$$

D'où à cause du lemme, si k est positif et plus petit que l'unité :

$$P\lambda^2\rho_1=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{k^N} \qquad (1)$$

Je dis que l'on ne peut avoir pour aucune valeur de k

$$P\lambda^2\rho_1=-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{k^N} \qquad (a)$$

En effet, soit d'abord k positif et plus grand que l'unité, et supposons,

s'il est possible, que l'on ait l'égalité (a). Fesons varier k d'une manière continue depuis cette valeur plus grande que l'unité, jusqu'à une valeur inférieur k_1. $P\lambda^2\rho_1$, qui est toujours égal à $\pm nk^{-N}$, ne s'annulera pas; d'ailleurs $\lambda^2\varepsilon$ étant une fonction continue de k, variera aussi d'une manière continue. Donc $P\lambda^2\rho_1$ ne pourra changer brusquement de signe, et si k devient égal à k_1, on aura encore

$$P\lambda^2\rho_1 = -(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{k_1{}^N}$$

ce qui est contraire au lemme. Donc l'égalité (1) est vraie aussi pour k positif et > 1.

Soit maintenant $k = Re^{\theta\sqrt{-1}}$, R étant le module de k. Supposons, si c'est possible, que l'on ait

$$P\lambda^2\rho_1 = -(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{R^N}e^{-N\theta\sqrt{-1}}$$

Si nous fesons varier θ, depuis la valeur θ jusqu'à la valeur zéro, le second membre variera d'une manière continue, et atteindra enfin la valeur $-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{k^N}$, sans avoir passé par zéro. Le premier membre variant aussi d'une manière continue, on aurait pour la valeur R de k,

$$P\lambda^2\rho_1 = -(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{k^N},$$

résultat en contradiction avec ce que nous avons vu plus haut.

La formule (1) subsiste donc dans tous les cas.

On a ensuite d'après (I, 14, 15) et le numéro précédent :

$$n^2 = P\frac{\nu^2\rho_3}{\nu^2\rho_4} = P\frac{\nu^2(K + K'\sqrt{-1} - \rho_1)}{\nu^2(K'\sqrt{-1} - \rho_1)} = P\frac{(k'^2\lambda^4\rho_1)}{(\mu^4\rho_1)} = k'^{2N}P\frac{\lambda^4\rho_1}{\mu^4\rho_1}$$

$$n^2 = P\frac{\mu^2\rho_2}{\mu^2\rho_4} = P\frac{\mu^2(k - \rho_1)}{\mu^2(K'\sqrt{-1} - \rho_1)} = P\frac{(k^2k'^2\lambda^4\rho_1)}{\nu^4\rho_1} = k^{2N}k'^{2N}P\frac{\lambda^4\rho_1}{\nu^4\rho_1}$$

Ces formules combinées avec la formule (1) donnent $P\mu^4\rho_1$, $P\nu^4\rho_1$; d'où au moyen du lemme $P\mu^2\rho_1$, $P\nu^2\rho_1$. Enfin, les autres relations du

numéro précédent conduisent aux valeurs de tous les produits, de sorte que l'on peut former le tableau suivant :

$$\mathrm{P}\,\lambda^2\rho_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{k^{\mathrm{N}}};\quad \mathrm{P}\,\mu^2\rho_1 = \left(\frac{k'}{k}\right)^{\mathrm{N}};\quad \mathrm{P}\,\nu^2\rho_1 = k'^{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{P}\,\lambda^2\rho_2 = \frac{1}{k^{\mathrm{N}}};\quad \mathrm{P}\,\mu^2\rho_2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\left(\frac{k'}{k}\right)^{\mathrm{N}};\quad \mathrm{P}\,\nu^2\rho_2 = k'^{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{P}\,\lambda^2\rho_3 = \frac{1}{k^{\mathrm{N}}};\quad \mathrm{P}\,\mu^2\rho_3 = \left(\frac{k'}{k}\right)^{\mathrm{N}};\quad \mathrm{P}\,\nu^2\rho_3 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, nk'^{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{P}\,\lambda^2\rho_4 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{nk^{\mathrm{N}}};\quad \mathrm{P}\,\mu^2\rho_4 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}\left(\frac{k'}{k}\right)^{\mathrm{N}};\quad \mathrm{P}\,\nu^2\rho_4 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} k'^{\mathrm{N}}$$

On peut, en combinant ces formules entr'elles, en déduire un grand nombre d'autres. On peut trouver d'ailleurs beaucoup de relations entre les produits, $\mathrm{P}\,\lambda^2\rho_1$ etc. à cause des égalités

$$\rho_2 = \mathrm{K} - \rho_1,\quad \rho_3 = \mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} - \rho_1,\quad \rho_4 = \mathrm{K}'\sqrt{-1} - \rho_1.$$

9. *Seconde forme des valeurs de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$. En employant les valeurs trouvées dans le n° 7 pour m_1, m_2, m_3 on arrive aux neuf formules suivantes :

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = n\mathrm{P}\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_1}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{P}\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_1}}{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{P}\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_1}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_4}}$$

$$\frac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = \mathrm{P}\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_2}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n\mathrm{P}\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_2}}{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_4}} = \mathrm{P}\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_2}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_4}}$$

$$\frac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon} = \mathrm{P}\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_3}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2\rho_4}} = \mathrm{P}\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_3}}{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2\rho_4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n\mathrm{P}\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_3}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2\rho_4}}$$

Les auteurs n'ont remarqué, entre ces neuf formules, que la première,

la quatrième et la septième qui conduisent aux développements des fonctions elliptiques en produits infinis, et la cinquième et la neuvième, qui sont analogues à la première.

10. *Troisième forme des valeurs de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$. Dans les valeurs $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ entrent ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. On peut exprimer ces trois fonctions au moyen de l'une seulement de ces quatre expressions. En appliquant aux égalités ainsi obtenues, les formules 25, 26 et 27 de l'introduction, on trouve une forme remarquable pour $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$, qui n'a pas son analogue dans le cas de n pair.

Nous allons montrer, par un exemple, comment on arrive à ces formules. On a, d'après la formule 25 de l'introduction :

$$\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\rho_1}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} - \rho_1)} = k^2\lambda^2\rho_1\,\lambda(\rho_1 + \varepsilon)\,\lambda(\rho_1 - \varepsilon).$$

Par conséquent :

$$\lambda(n\varepsilon) = \frac{1}{n}\lambda\varepsilon \cdot \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\rho_1}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} - \rho_1)} = \frac{1}{n}k^{2N}\mathrm{P}\cdot\lambda^2\rho_1\cdot\mathrm{P}\lambda(\rho_1 + \varepsilon)\,\lambda(\rho_1 - \varepsilon).$$

ou, en remplaçant $\mathrm{P}\lambda^2\rho_1$ par sa valeur :

$$\lambda(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}k^{N}\lambda\varepsilon\,\mathrm{P}\lambda(\rho_1 + \varepsilon)\,\lambda(\rho_1 - \varepsilon)$$

que l'on peut encore écrire, sous la forme abrégée,

$$\lambda(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}k^{N}\lambda\varepsilon\,\mathrm{P}\lambda(\rho_1 \pm \varepsilon).$$

On trouve ainsi les formules suivantes, où les valeurs d'une même fonction sont rangées dans une colonne verticale :

$$\begin{array}{lll}
(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} = & \dfrac{\mu(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = & \dfrac{\nu(n\varepsilon)}{\nu\varepsilon} = \\[2ex]
k^{N}\,\mathrm{P}\lambda(\rho_1 \pm \varepsilon) = & k^{N}\,k'^{-N}\mathrm{P}\mu(\rho_1 \pm \varepsilon) = & k'^{-N}\mathrm{P}\nu(\rho_1 \pm \varepsilon) = \\[2ex]
k^{N}\,\mathrm{P}\dfrac{\mu(\rho_2 \pm \varepsilon)}{\nu(\rho_2 \pm \varepsilon)} = & k^{N}\,k'^{N}\,\mathrm{P}\dfrac{\lambda(\rho_2 \pm \varepsilon)}{\nu(\rho_2 \pm \varepsilon)} = & k'^{N}\,\mathrm{P}\dfrac{1}{\nu(\rho_2 \pm \varepsilon)} = \\[2ex]
k^{-N}\mathrm{P}\dfrac{\nu(\rho_3 \pm \varepsilon)}{\mu(\rho_3 \pm \varepsilon)} = & k^{-N}k'^{N}\,\mathrm{P}\dfrac{1}{\mu(\rho_3 \pm \varepsilon)} = & k'^{N}\,\mathrm{P}\dfrac{\lambda(\rho_3 \pm \varepsilon)}{\mu(\rho_3 \pm \varepsilon)} = \\[2ex]
k^{-N}\mathrm{P}\dfrac{1}{\lambda(\rho_4 \pm \varepsilon)}; & k^{-N}k'^{-N}\mathrm{P}\dfrac{\nu(\rho_4 \pm \varepsilon)}{\lambda(\rho_4 \pm \varepsilon)}; & k'^{-N}\mathrm{P}\dfrac{\mu(\rho_4 \pm \varepsilon)}{\lambda(\rho_4 \pm \varepsilon)}.
\end{array}$$

Il est clair que, de ces douze relations, les neuf dernières peuvent être déduites des trois premières au moyen des formules 15-21 de l'introduction; les trois premières elles-mêmes peuvent encore être retrouvées en partant des formules du n° 9.

11. *Quatrième forme des valeurs de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$. On peut faire subir aux formules précédentes une légère transformation qui conduit à une forme remarquable pour les valeurs de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$.

On a :

$$P\lambda(\rho_1 \pm \varepsilon) = P\lambda\left(\frac{sK}{n} \pm \varepsilon\right) \times P\lambda\left(\frac{s'K'\sqrt{-1}}{n} \pm \varepsilon\right) \times$$

$$P\lambda\left(\frac{sK + s'K'\sqrt{-1}}{n} \pm \varepsilon\right) \times P\lambda\left(\frac{sK - s'K'\sqrt{-1}}{n} \mp \varepsilon\right)$$

s et s' recevant dans le second membre, toutes les valeurs paires de 2 à $n-1$.

Or on a, d'après (I, 6) :

$$\lambda\left(\frac{sK}{n} - \varepsilon\right) = \lambda\left[\frac{(2n-s)K}{n} + \varepsilon\right]$$

$$\lambda\left(\frac{s'K'\sqrt{-1}}{n} - \varepsilon\right) = -\lambda\left[\frac{(2n-s')K'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right]$$

$$\lambda\left(\frac{sK - s'K'\sqrt{-1}}{n} - \varepsilon\right) = \lambda\left[\frac{(2n-s)K + s'K'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right]$$

$$\lambda\left(\frac{sK + s'K'\sqrt{-1}}{n} - \varepsilon\right) = \lambda\left[\frac{(2n-s)K + (2n-s')K'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right]$$

$$\lambda\left(\frac{sK - s'K'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right) = \lambda\left[\frac{sK + (2n-s')K'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right]$$

En tenant compte de ces formules, on trouve :

$$\lambda\varepsilon P\lambda(\rho_1 + \varepsilon)\lambda(\rho_1 - \varepsilon) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} P\lambda\left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon\right)$$

a et b recevant dans le second membre toutes les valeurs de 0 à $n-1$. On arrive ainsi à la valeur de $\lambda(n\varepsilon)$, et de même à celles de $\mu(n\varepsilon)$ et $\nu(n\varepsilon)$. Chacune des fonctions $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$, peut se mettre sous quatre formes différentes. Voici les trois formules les plus remarquables :

$$\lambda(n\varepsilon) = \qquad k^{N} P\lambda \left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon \right)$$

$$\mu(n\varepsilon) = \qquad \left(\frac{k}{k'} \right)^{N} P\mu \left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon \right)$$

$$\nu(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{k'} \right)^{N} P\nu \left(\frac{2aK + 2bK'\sqrt{-1}}{n} + \varepsilon \right) \qquad (1)$$

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE PAIR.

§ I. *Formules fondamentales.*

12. *Valeur de* $\lambda(n\varepsilon)$. Nous savons que la valeur de $\lambda(n\varepsilon)$ est de la forme :

$$m_1 \lambda\varepsilon \mu\varepsilon \nu\varepsilon \frac{P(\lambda^2\varepsilon - A^2)}{P(\lambda^2\varepsilon - D^2)}.$$

Nous allons montrer qu'aucun facteur du numérateur ou du dénominateur ne s'annule en même temps que $\mu\varepsilon$ et $\nu\varepsilon$, puis nous déterminerons m_1, enfin nous chercherons les facteurs du numérateur et du dénominateur.

---

(1) Ce sont les dernières formules de ce numéro qu'Abel trouve d'abord par la méthode dont nous avons parlé dans la note du n° 6. Il détermine les constantes en fesant $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = K$, $\varepsilon = K + K\sqrt{-1}$, ce qui le conduit aux formules 1, 3, 9 du n° 9; il en déduit les formules 4 et 7. Abel ne s'occupe pas des produits $P\lambda_2\rho_1$. — Broch (§ 29, 30, 31, p. 38) suit Abel, sans donner aucune autre expression de $\lambda(n\varepsilon)$ etc., mais il arrive à quelques unes des formules sur les produits $P\lambda^2\rho_1$ etc., au moyen de certaines relations entre les coëfficients du numérateur et du dénominateur ordonné suivant les puissances de $\lambda^2\varepsilon$. Gudermann cherche aussi quelques uns de ces produits et, de la même manière (§ 152 et 153, p. 302, 313), mais dans la recherche des expressions de $\lambda(n\varepsilon)$ etc., il part de la seconde forme et non de la dernière; ce qui est préférable puisque cette marche peut être suivie dans le cas de n pair. Nous avons montré dans l'introduction (n° 10) que la méthode de Broch et Gudermann, pour trouver les produits $P\lambda^2\rho_1$ etc. ne diffère guère de celle que nous avons suivie. Mais celle-ci conduit simplement à la valeur des produits $\lambda^2\rho_1$ etc., tandis que l'autre enchevêtre deux recherches distinctes, celle des coëfficients et celle des facteurs du numérateur et du dénominateur.

1° *Aucun facteur du numérateur ou du dénominateur n'est nul en même temps que* $\mu\varepsilon$ *et* $\nu\varepsilon$. Soit $\mu\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = (2a + 1)\,K + 2bK'\sqrt{-1}$, on aura $n\varepsilon = (2a+1)nK + 2bnK'\sqrt{-1}$ et par conséquant (I, 6), $\lambda(n\varepsilon) = 0$. Il résulte de là, que $1 - \lambda^2\varepsilon$ ou $\mu^2\varepsilon$ ne se trouve pas parmi les facteurs du dénominateur. Ensuite on a :

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\mu\varepsilon} = -\lim \frac{n\mu(n\varepsilon)\,\nu(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\nu\varepsilon} = \text{quantité finie.}$$

Donc $\mu\varepsilon$ n'est facteur qu'une seule fois au numérateur. La proposition énoncée est donc vraie pour $\mu\varepsilon$; on peut faire une démonstration analogue pour $\nu\varepsilon$.

2° *Détermination de la constante.* Soit $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ dans l'égalité

$$\lambda(n\varepsilon)\lambda\varepsilon = m_1 \frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda^2\varepsilon} \times \frac{\lambda^4\varepsilon P(\lambda^2\varepsilon - A^2)}{P(\lambda^2\varepsilon - D^2)}.$$

Puisque n est pair, $n\varepsilon = nK'\sqrt{-1}$ est une valeur qui annule $\lambda(n\varepsilon)$ (I, 6); d'ailleurs $\lambda\varepsilon = \infty$. Mais :

$$\lim \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda^{-1}\varepsilon} = -\lim n\mu(n\varepsilon)\,\nu(n\varepsilon) \times \frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda'\varepsilon} = \frac{n}{k} (\text{I, } 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 50).$$

Donc :

$$\frac{n}{k} = m_1(-k) \lim \frac{\lambda^4\varepsilon P(\lambda^2 - A^2)}{P(\lambda^2\varepsilon - D^2)}.$$

L'expression du second membre devant être finie, il en résulte que le produit du dénominateur doit avoir quatre facteurs de plus que celui du numérateur; et de plus

$$\frac{n}{k} = -m_1 k \quad \text{ou} \quad m_1 = -\frac{n}{k^2}.$$

3° *Facteurs du numérateur et du dénominateur.* On trouve ces facteurs avec la même facilité que dans le cas de n impair. On arrive à la formule suivante :

$$\lambda(n\varepsilon) = -\frac{n}{k^2}\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\varepsilon \frac{P(\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_1)}{P(\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_4)}$$

$$r_1 = \frac{sK + s'K'\sqrt{-1}}{n} \qquad r_4 = \frac{sK + \sigma'K'\sqrt{-1}}{n}$$

s est un nombre pair qui doit recevoir toutes les valeurs positives non supérieures à n; s' doit recevoir les mêmes valeurs avec le double signe sauf lorsqu'il est égal ou associé à 0 ou n; σ' doit recevoir les valeurs positives et négatives impaires non supérieures à n. Nous voyons que les nombres s, s' σ' satisfont encore à la règle énoncée à la fin du n° 4.

Le nombre des facteurs du premier degré est n^2-1 au numérateur et de n^2 au dénominateur en regardant $\mu\varepsilon$, $\nu\varepsilon$ comme deux facteurs de cette espèce. On en conclut de suite que le degré du numérateur et celui du dénominateur de $\mu(n\varepsilon)$ et $\nu(n\varepsilon)$ en $\mu\varepsilon$ et $\nu\varepsilon$ sera n^2.

Remarque. Si nous avions déterminé d'abord les facteurs du numérateur et du dénominateur il est clair que le 1° n'avait plus d'objet et que le 2° pouvait être simplifié. Nous avons suivi une autre marche afin de montrer la fécondité de la méthode qui, dans toutes ces recherches, emploie les expressions $\frac{0}{0}$.

13. *Valeur de* $\mu(n\varepsilon)$ *et* $\nu(n\varepsilon)$. En fesant $\varepsilon=K'\sqrt{-1}$, on trouve

$$\mu(nK'\sqrt{-1})=(-1)^{\frac{n}{2}}\mu(0)=(-1)^{\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \nu(nK'\sqrt{-1})=(-1)^{\frac{n}{2}},$$

d'où résulte que le numérateur et le dénominateur de $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ sont de même degré, ce que nous savons déjà par le n° 12. Les facteurs se déterminent comme dans les cas précédents. On trouve :

$$\mu(n\varepsilon)=m_2\,\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2 r_2}{\mu^2\varepsilon-\mu^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon-\mu^2 r_2}{\mu^2\varepsilon-\mu^2 r_4}$$

$$\nu(n\varepsilon)=m_3\,\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2 r_3}{\nu^2\varepsilon-\nu^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}\mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon-\nu^2 r_3}{\nu^2\varepsilon-\nu^2 r_4}$$

$$r_2=\frac{\sigma K+s'K'\sqrt{-1}}{n}, \qquad r_3=\frac{\sigma K+\sigma'K'\sqrt{-1}}{n}$$

s', σ, σ', satisfesant à la règle du n° 4(1).

14. *Expressions de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ *respectivement au moyen de* $\mu\varepsilon$

---

(1) ABEL (n° 11, p. 165) détermine les facteurs par une autre méthode; U. H. MEYER (loc. cit.) y arrive à peu près de la même manière; BROCH ne s'occupe pas de ces facteurs dans le cas d'un nombre pair; SANIO, § 1, p. 10 et GUDERMANN (§ 150, p. 294) trouvent les facteurs comme nous l'avons indiqué dans le texte.

et $\nu\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$ et $\nu\varepsilon$, $\lambda\varepsilon$ et $\mu\varepsilon$. Des considérations analogues à celle du n° 6, conduisent à ces expressions que nous donnons avec les précédentes dans le tableau suivant :

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon} = -\frac{n}{k^2} \quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_1}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_4} = -\frac{n}{k^2} \quad \mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_1}{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_4} = -nk^2 \quad \mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon - \nu^2 r_1}{\nu^2\varepsilon - \nu^2 r_4}$$

$$\mu(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_2}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_4} = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_2}{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_4} = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon - \nu r_2}{\nu^2\varepsilon - \nu^2 r_4}$$

$$\nu(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_3}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2 r_4} = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_3}{\mu^2\varepsilon - \mu^2 r_4} = (-1)^{\frac{n}{2}} \mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon - \nu r_3}{\nu^2\varepsilon - \nu r_4}$$

Remarque. Soit r une quelconque des expressions r_1, r_2, r_3 ou r_4. Je dis que, dans les formules précédentes, on peut remplacer r par

$$\mathrm{K} - r, \ \mathrm{K} + \mathrm{K}'\sqrt{-1} - r, \ \mathrm{K}'\sqrt{-1} - r.$$

Pour le montrer, considérons, par exemple, $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ et λr_1. On aura

$$\lambda(\mathrm{K} - r_1) = \lambda\left(\mathrm{K} - \frac{s\mathrm{K} + s'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda\left[\frac{(n-s)\mathrm{K} - s'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}\right].$$

Soit s différent de 0 et n; s recevra toutes les valeurs paires comprises entre 0 et n; il est clair qu'il en sera de même de $n - s$; si s est différent de 0 et de n, s' prendra toutes les valeurs positives et négatives qui, en valeur absolue, sont comprises entre 0 et n; il en sera de même de $-s'$. Donc, pour ces valeurs $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ sera égal à λr_1. Soit maintenant $s = 0$, s' peut recevoir les valeurs positives comprises entre 0 et n; on aura :

$$\lambda(\mathrm{K} - r_1) = \lambda(2\mathrm{K} - \mathrm{K} + r_1) = \lambda\left(\mathrm{K} + \frac{s'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}\right) = \lambda\left(\frac{n\mathrm{K} + s'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

et par conséquent $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ prend les valeurs de λr_1 lorsque $s = n$. De même quand $s = n$, $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ prend les valeurs de λr_1 quand $s = 0$; quand $s' = 0$, $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ prend les valeurs de λr_1 quand $s' = 0$ et enfin quand $s' = n$, $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ prend les valeurs de λr_1 quand $s' = n$. Par conséquent λr_1 et $\lambda(\mathrm{K} - r_1)$ prennent les mêmes valeurs, quand r_1 prend toutes les valeurs dont il est susceptible.

Des démonstrations analogues peuvent se faire dans tous les autres cas, et par suite le théorème énoncé est démontré.

Ce théorème est, comme le verra au § II, la clef de toutes les différences qui existent entre la théorie de la multiplication par un nombre pair et la multiplication par un nombre impair(1).

§ II. *Formules diverses déduites des formules fondamentales.*

15. *Autre méthode pour la détermination des constantes.* — Nous ferons pour cela, comme dans le n° 7, $\varepsilon=0$, $\varepsilon=K$, $\varepsilon=K+K'\sqrt{-1}$. On trouve :

1° Pour $\varepsilon=0$

$$\lim\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon}=n=-\frac{n}{k^2}\,\mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_1}{\lambda^2 r_4}\quad \text{d'où}\quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_1}{\lambda^2 r_4}=-k^2$$

$$\mu(n\varepsilon)=1=(-1)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_2}{\lambda^2 r_4}\quad \text{»}\quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_2}{\lambda^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\nu(n\varepsilon)=1=(-1)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_3}{\lambda^2 r_4}\quad \text{»}\quad \mathrm{P}\frac{\lambda^2 r_3}{\lambda^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

2° Pour $\varepsilon=K$

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon}=-(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{k^2}=-\frac{n}{k^2}\,\mathrm{P}\frac{\mu^2 r_1}{\mu^2 r_4}\quad \text{»}\quad \mathrm{P}\frac{\mu^2 r_1}{\mu^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{k^2}{k'^2}$$

$$\mu(n\varepsilon)=(-1)^{\frac{n}{2}}=(-1)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{P}\frac{\mu^2 r_2}{\mu^2 r_4}\quad \text{»}\quad \mathrm{P}\frac{\mu^2 r_2}{\mu^2 r_4}=1$$

$$\nu(n\varepsilon)=1=(-1)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{P}\frac{\mu r_3}{\nu r_4}\quad \text{»}\quad \mathrm{P}\frac{\mu^2 r_3}{\mu^2 r_4}=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

---

(1) Sanio ne signale que les substitutions $K-r$ et $K'\sqrt{-1}-r$, en accordant, semble-t-il, une plus grande importance à la première. Cela vient probablement de la notation de Jacobi $\mathrm{co}\lambda\varepsilon$ pour $\lambda(K-\varepsilon)$, ou plutôt *sin coam*ε, pour *sin am*$(K-\varepsilon)$ qui peut faire croire que *am* $(K-\varepsilon)$ jouit de propriétés plus remarquables que d'autres amplitudes. En réalité, comme l'a très bien montré Lamé, c'est $K'\sqrt{-1}-\varepsilon$ qui jouit de propriétés spéciales ; d'ailleurs, $K+K'\sqrt{-1}-\varepsilon$ est aussi remarquable que $K-\varepsilon$.

3° Pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{nk^2}{k'^2} = -nk^2\, P\frac{\nu^2 r_1}{\nu^2 r_4} \quad \text{d'où} \quad P\frac{\nu^2 r_1}{\nu^2 r_4} = -(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{k'^2}$$

$$\mu(n\varepsilon) = \quad 1 \quad = (-1)^{\frac{n}{2}} P\frac{\nu^2 r_2}{\nu^2 r_4} \quad » \quad P\frac{\nu^2 r_2}{\nu^2 r_4} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\nu(n\varepsilon) = (-1)^{\frac{n}{2}} \quad = (-1)^{\frac{n}{2}} P\frac{\nu^2 r_3}{\nu^2 r_4} \quad » \quad P\frac{\nu^2 r_3}{\nu^2 r_4} = \quad 1$$

16. *Seconde forme des valeurs de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$. On déduit des formules précédentes et du n° 14(1).

$$\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\lambda\varepsilon\lambda'\varepsilon} = n\, P\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_1}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_4}} = -(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{k^2} P\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r_1}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\mu^2 r_4}} = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{nk^2}{k'^2} P\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2 r_1}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2 r_4}}$$

$$\mu(n\varepsilon) = P\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_2}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_4}} = (-1)^{\frac{n}{2}} P\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r_2}}{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r_4}} = P\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu r_2}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu r_4}}$$

$$\nu(n\varepsilon) = P\frac{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_3}}{1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r_4}} = P\frac{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r_3}}{1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r_4}} = (-1)^{\frac{n}{2}} P\frac{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2 r_3}}{1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2 r_4}}$$

17. *Les valeurs de* $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ *ne peuvent pas s'exprimer au moyen de produits de la forme* $P\lambda(r_1+\varepsilon)\lambda(r_1-\varepsilon)$ *etc.* Remplaçons successivement dans l'expression $P\left(1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r}\right)$, où r désigne l'une des quatre

(1) Sanio donne les formules seulement sous cette forme, en se bornant aux expressions en λ, Gudermann en donne quelques-unes de plus. L'un et l'autre cherchent les constantes par un procédé qui ne diffère pas au fond de celui qui est exposé au n° 15, sauf que le dernier emploie une série pour déterminer celle qui entre dans $\lambda(n\varepsilon)$. Il trouve quelques-unes des relations du n° 15 au moyen de celles qui existent entre les coëfficients du numérateur et du dénominateur de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$, comme dans le cas de n impair (voir § 153, p. 313).

expressions r_1, r_2, r_3, r_4, r par $K'\sqrt{-1}-r$, $K-r$, $K+K'\sqrt{-1}-r$. On trouvera (I, 13, 25, 19, 26, 20, 27)

$$P\left(1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r}\right) = P(1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r);$$

$$\text{d'où}\quad P\frac{\lambda^2 r-\lambda^2\varepsilon}{1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r} = P\lambda(r+\varepsilon)\lambda(r-\varepsilon) = P\lambda^2 r.$$

$$P\left(1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r}\right) = P(1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r) = P\left(1-\frac{\lambda^2\varepsilon\nu^2 r}{\mu^2 r}\right);$$

$$\text{d'où}\quad P\frac{\mu^2 r-\lambda^2\varepsilon\nu^2 r}{1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r} = P\mu(r+\varepsilon)\mu(r-\varepsilon) = P\mu^2 r.$$

$$P\left(1-\frac{\lambda^2\varepsilon}{\lambda^2 r}\right) = P(1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r) = P\left(1-\frac{k^2\lambda^2\varepsilon\mu^2 r}{\nu^2 r}\right);$$

$$\text{d'où}\quad P\frac{\nu^2 r-k^2\lambda^2\varepsilon\mu^2 r}{1-k^2\lambda^2\varepsilon\lambda^2 r} = P\nu(r+\varepsilon)\nu(r-\varepsilon) = P\nu^2 r.$$

Ces trois formules remarquables peuvent s'obtenir aussi au moyen de la considération des produits $P\left(1-\frac{\mu^2\varepsilon}{\mu^2 r}\right)$, $P\left(1-\frac{\nu^2\varepsilon}{\nu^2 r}\right)$. Elles expriment que les produits $P\lambda(r+\varepsilon)\lambda(r-\varepsilon)$ etc. sont constants. Il en résulte qu'il est impossible d'exprimer $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$, qui sont variables avec ε, au moyen de ces produits comme on l'a fait dans le cas de n impair. Cette propriété montre bien toute la différence qui existe entre la multiplication par un nombre pair et la multiplication par un nombre impair (1).

18. *Valeurs des produits* $P\lambda^2 r$, $P\mu^2 r$, $P\nu^2 r$. On peut calculer directement la valeur de tous ces produits et par conséquent aussi celle de

(1) Cette propriété n'a pas encore été signalée, que nous sachions. Briot donne la première des formules démontrées dans le texte, mais il fait une singulière méprise à propos des deux autres. Il arrive, en suivant la même marche que dans le cas d'un nombre impair, à la formule (voir § 30, p. 63 sq. de son ouvrage)

$$\frac{g'-a'\mu(n\varepsilon)}{n'-f'\mu(n\varepsilon)} = P\mu(\varepsilon+r)\mu(\varepsilon-r),$$

d'où il a cru pouvoir tirer la valeur de $\mu(n\varepsilon)$. Mais il n'a pas remarqué que les valeurs de g', a', n', f' sont telles que $g' : n' = a' : f'$, comme il résulte du § 28 p. 57, où ces valeurs sont données. L'égalité se réduit donc à $g' = nP$. On peut faire la même observation touchant la formule qui contient $\nu(n\varepsilon)$.

$P\lambda(r+\varepsilon)\lambda(r-\varepsilon)$ etc., en s'appuyant sur la propriété de r de pouvoir être remplacé par $K'\sqrt{-1}-r$, $K-r$, $K+K'\sqrt{-1}-r$, mais il est plus facile de faire cette recherche seulement pour $P\lambda^2 r_3$, $P\mu^2 r_3$, $P\nu^2 r_3$, et de déduire les autres formules de celles du n° 15.

Nous avons

$$P\lambda r_3 = P\lambda\left(\frac{\sigma K+\sigma_1 K'\sqrt{-1}}{n}\right)\lambda\left(\frac{\sigma K-\sigma_1 K'\sqrt{-1}}{n}\right)$$

σ et σ_1 recevant les valeurs $1, 3, 5 \ldots n-1$. Ensuite

$$P\lambda(K'\sqrt{-1}-r_3) = P\lambda\left[\frac{-\sigma K+(n-\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}\right]\lambda\left[\frac{-\sigma K+(n+\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}\right]$$

$$= P\lambda\left[\frac{\sigma K-(n-\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}\right]\lambda\left[\frac{\sigma K-(n+\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}+2K'\sqrt{-1}\right]$$

$$= P\lambda\left[\frac{\sigma K-(n-\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}\right]\lambda\left[\frac{\sigma K+(n-\sigma_1)K'\sqrt{-1}}{n}\right];$$

$n-\sigma_1$ recevant les mêmes valeurs que σ_1, il est clair que

$$P\lambda r_3 = P\lambda(K'\sqrt{-1}-r_3).$$

On démontre de la même manière que

$$P\mu(K+K'\sqrt{-1}-r_3) = (-1)^{\frac{n}{2}} P\mu r_3, \qquad P\nu(K-r_3) = P\nu r_3.$$

Mais on a, d'autre part (I, 13, 14, 15).

$$\lambda(K'\sqrt{-1}-r_3) = -\frac{1}{k\lambda r_3}; \quad \mu(K+K'\sqrt{-1}-r_3) = -\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}\,\frac{1}{\mu r_3}; \quad \nu(K-r_3) = \frac{k'}{\nu r_3}.$$

Donc, en faisant $N=\frac{n^2}{2}$, nombre pair, de sorte que $(-1)^{\frac{N}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$

$$P\left(-\frac{1}{k\lambda r_3}\right) = P\lambda r_3 \qquad \text{d'où} \quad P\lambda^2 r_3 = \left(\frac{1}{k}\right)^N$$

$$P\left(-\sqrt{-1}\,\frac{k'}{k}\,\frac{1}{\mu r_3}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}} P\mu r_3 \quad \text{d'où} \quad P\mu^2 r_3 = \left(\frac{k'}{k}\right)^N$$

$$P\left(\frac{k'}{\nu r_3}\right) = P\nu r_3 \qquad \text{d'où} \quad P\nu^2 r_3 = k'^N$$

Ces relations combinées avec celles de n° 15, nous permettent de former le tableau suivant(1) :

$$\begin{array}{lll}
P\lambda^2 r_1 = -(-1)^{\frac{n}{2}} k^{-N+2}\,; & P\mu^2 r_1 = k^{-N+2} k'^{N-2}\,; & P\nu^2 r_1 = -(-1)^{\frac{n}{2}} k'^{N-2} \\
P\lambda^2 r_2 = k^{-N}\,; & P\mu^2 r_2 = (-1)^{\frac{n}{2}} k^{-N} k'^{N}\,; & P\nu^2 r_2 = (-1)^{\frac{n}{2}} k'^{N} \\
P\lambda^2 r_3 = k^{-N}\,; & P\mu^2 r_3 = k^{-N} k'^{N}\,; & P\nu^2 r_3 = k'^{N} \\
P\lambda^2 r_4 = (-1)^{\frac{n}{2}} k^{-N}\,; & P\mu^2 r_4 = (-1)^{\frac{n}{2}} k^{-N} k'^{N}\,; & P\nu^2 r_4 = k'^{N}
\end{array}$$

19. *Remarque.* Pour traiter complètement le problème de la multiplication des fonctions elliptiques, sans recourir à la théorie de la transformation, ni aux propriétés des fonctions Θ, nous devrions déduire de ce qui précède les expressions de $\lambda(n\varepsilon)$, $\mu(n\varepsilon)$, $\nu(n\varepsilon)$ en sommes, puis la multiplication des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce. Il faudrait ensuite exposer la méthode directe de calcul des coëfficients du numérateur et du dénominateur, les propriétés des équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur, les relations qui existent entre le problème de la multiplication et plusieurs questions de géométrie, etc. Mais notre but étant d'exposer, non une théorie complète de la multiplication, mais une méthode simple et naturelle d'arriver aux formules fondamentales, nous terminons ici cette esquisse. D'ailleurs, tous les auteurs traitent de la même manière les divers points que nous venons de rappeler, quelle que soit la voie suivie pour arriver aux formules qui leur servent de point de départ(2).

---

(1) Sanio, § 2, p. 14, cherche directement $P\lambda^2 r_1$, $P\lambda^2 r_4$, mais la première expression est donnée avec une faute de signe. Gudermann, § 153, p. 313, trouve les mêmes expressions en employant les relations entre les coëfficients du numérateur et du dénominateur.

(2) Sur tous ces points, voir l'Introduction particulièrement la note de la page 28, où l'on signale maintes recherches se rapportant tant à la multiplication qu'à la transformation. Sur le calcul des coëfficients, voir surtout Broch, § 28, p. 53. La considération des sommes est due à Abel, *OEuvres*, XII, § 23, p. 186 et *passim*.

SECONDE PARTIE.

DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

OBJET, ÉTENDUE ET DIVISION DE LA SECONDE PARTIE.

20. *Objet et division de la seconde partie.* Abel, dans le mémoire célèbre où il a résumé et complété ses recherches sur les fonctions elliptiques, énonce le problème de la transformation de la manière suivante : « Soit un nombre quelconque de variables liées entr'elles par des équations algébriques. Trouver la relation linéaire la plus générale qui existe entre une fonction algébrique de ces variables, un nombre quelconque de logarithmes de fonctions algébriques de ces variables, et un nombre quelconque d'intégrales elliptiques des trois espèces contenant ces mêmes variables. » Il a ramené cette question générale à cette autre plus simple, résolue entièrement par lui-même et par Jacobi. « Cherchez une fonction y rationelle en x, de degré premier et satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{M}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} \qquad (1)$$

On suppose que $y=0$, quand $x=0$, et l et M sont des constantes à déterminer. » Enfin, en s'appuyant davantage sur la double périodicité, on est parvenu depuis lors à réduire le problème de l'intégration rationnelle de l'équation (1) aux cas très-simples désignés sous le nom de transformations

des fonctions elliptiques par division d'une seule période; Jacobi et Abel avaient déjà traité avec soin ces derniers problèmes(1).

Dans cet écrit, nous n'exposerons pas cette réduction de la question générale à ses cas les plus particuliers. Au contraire, nous ferons voir que l'on peut trouver *directement* toutes les solutions de l'équation (1) de la forme

$$y = \mathrm{F}x \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,\mathrm{F}x,$$

$\mathrm{F}x$ étant une fonction rationelle en x, et la valeur $y=0$ correspondant à $x=0$, pourvu que l'on suppose qu'il n'existe aucun facteur commun aux quatre nombres entiers qui caractérisent chaque transformation (2).

Ces recherches sont divisées en cinq chapitres. Dans le premier, nous donnons divers théorèmes sur la forme de la solution et nous divisons, d'après ces principes, les transformations en quatre classes que nous étudions successivement dans les quatre chapitres suivants. Dans chacun de ceux-ci, nous cherchons d'abord les valeurs de y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$, indépendamment les unes des autres, en supposant le problème possible. Dans cette partie de notre travail, nous aurions dû peut-être commencer par les cas particuliers les plus simples pour montrer les analogies du problème de la transformation avec celui de la multiplication, et nous élever ensuite aux cas généraux; mais ces derniers ont une telle ressemblance avec les premiers quand on a démontré les théorèmes généraux du premier chapitre, que nous aurions dû, en suivant la marche simple dont nous venons de parler, établir deux fois pour ainsi dire les mêmes calculs et les mêmes raisonnements. Nous avons donc indiqué seulement comment ces cas simples peuvent se déduire des cas généraux. D'ailleurs tous, à l'exception d'un seul qui n'a pas été remarqué, ont été traités en détail par divers auteurs, tandis que plusieurs cas généraux n'ont jamais été examinés. — Les valeurs de y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$, une fois trouvées, nous montrons qu'elles peuvent se déduire les unes des autres; enfin nous prouvons qu'elles satisfont à l'équation différentielle.

---

(1) Voir surtout sur cette réduction, Abel, I, XXI, ch. II, p. 350, ch. IV, p. 368; XIII, p. 257 et passim. Il l'annonce dès son premier mémoire, XII, n° 49, p. 242 (*Crelle*, tome III) et un problème énoncé par lui dans le *Journal de Crelle* (II, cahier III), la suppose déjà. Comparez Briot et Bouquet, *Théorie*, liv. V, ch. V, p. 243, ch. VII, p. 270; Königsberger, *Die Transf.*, etc., §§ 2, 3, 6, 27, p. 2, 8, 19, 108 (voir l'introduction).

(2) Cette dernière restriction se présente d'elle-même, tant dans notre théorie que dans celle qui emploie les fonctions θ. Voir Königsberger, § 20, p. 64. On peut amener aisément tous les cas à ceux où les quatre nombres caractéristiques n'ont pas de facteur commun.

Dans la recherche des valeurs de y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$, nous procédons comme on le ferait dans la théorie générale des fonctions doublement périodiques(1), mais en nous appuyant sur d'autres principes, beaucoup plus élémentaires; dans la déduction des valeurs de y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$ les unes des autres, nous suivons une méthode propre, plus rigoureuse ou plus générale que celles qui ont été employées antérieurement; enfin pour la substitution de ces valeurs dans l'équation différentielle, nous nous servons de la méthode d'Abel ou de celle de Jacobi.

21. *Remarque*. Nous aurions pu traiter, outre les cas indiqués plus haut, ceux où, à $x=0$, correspond une valeur de y qui n'est pas nulle; ensuite ceux où y a l'une des formes :

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{F}x \qquad \sqrt{1-k^2x^2}\,\mathrm{F}x.$$

Mais ceux que nous examinons suffisent pour montrer la fécondité de la méthode dont le procédé principal est la recherche de la vraie valeur des expressions qui prennent la forme $\frac{0}{0}$.

Nous n'avons pas traité la question de la multiplication complexe, c'est à dire la transformation dans le cas où $l=k$ ou $=k'$, M n'étant pas un nombre rationnel, parce que cette difficile question n'a pas encore été complètement élucidée par les géomètres et que d'ailleurs, elle ne fait pas naturellement partie de notre sujet.

Nous avons aussi laissé de côté toutes les questions qui se traitent de la même manière, quelle que soit la méthode employée pour arriver aux valeurs de y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$. Ainsi nous ne parlons pas des expressions de ces fonctions en sommes, ni de la transformation des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce, ni des transformations complémentaires et supplémentaires, ni de la solution du problème de la multiplication qu'on peut en déduire. Nous ne touchons pas non plus à la théorie des équations modulaires et des équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur de y (2). Pour tous ces points, nous renvoyons aux traités et aux mémoires originaux.

---

(1) Nous disons *comme on le ferait*, parce que jusqu'à présent on n'a traité de cette manière que quelques particuliers (Briot et Bouquet, § 198, p. 255 etc.)

(2) Sur ces diverses questions, voir les notes bibliographiques de l'Introduction.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

22. *La fonction y est impaire en x.* Nous écrirons, au lieu de l'équation différentielle en y et x, la relation

$$\varepsilon = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{M}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}$$

Nous aurons :

$$x = \lambda(\varepsilon, k) = \lambda\varepsilon = \lambda \qquad y = \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right)$$

$$\sqrt{1-x^2} = \mu(\varepsilon, k) = \mu\varepsilon = \mu \qquad \sqrt{1-y^2} = \mu\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right)$$

$$\sqrt{1-k^2x^2} = \nu(\varepsilon, k) = \nu\varepsilon = \nu \qquad \sqrt{1-l^2y^2} = \nu\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right)$$

Pour abréger, nous poserons :

$$\lambda_1\varepsilon = \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right),\ \mu_1\varepsilon = \mu\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right),\ \nu_1\varepsilon = \nu\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right),\ \lambda'_1\varepsilon = \lambda'\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right) \text{ etc.}$$

de sorte que, par exemple,

$$\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{M}}\lambda'_1 \quad \text{puisque} \quad \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{M}}\,\frac{d\lambda\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}, l\right)}{d\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\right)}$$

Si ε change de signe et devient $-\varepsilon$, x ou $\lambda\varepsilon$ devient $\lambda(-\varepsilon) = -\lambda\varepsilon$, et $\lambda_1\varepsilon$ devient $-\lambda_1\varepsilon$. Donc quand x se change en $-x$, y se change en $-y$. Par conséquent, y est une fonction impaire de x, que nous pouvons écrire sous l'une ou l'autre de ces formes :

$$y = mx\,\frac{\mathrm{P}(x^2 - \mathrm{A}^2)}{\mathrm{P}(x^2 - \mathrm{D}^2)} \quad \text{ou} \quad y = mx\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,\frac{\mathrm{P}(x^2 - \mathrm{A}^2)}{\mathrm{P}(x^2 - \mathrm{D}^2)}$$

Il résulte de là, que si on fait $x = \infty$, on aura $y = \infty$, ou $y = 0$, mais jamais $y =$ une valeur finie.

23. *Dans le cas où y est infini en même temps que x, $y : x$ a une valeur*

finie pour x infini. Considérons d'abord le cas où y est une fraction rationnelle, et supposons que l'on ait

$$\varepsilon = K'\sqrt{-1} \quad \text{et par suite } \lambda\varepsilon = x = \infty$$

$$\frac{\varepsilon}{M} = 2aL + (2b+1)L'\sqrt{-1} \quad \text{et par suite } \lambda_1\varepsilon = \infty$$

Le degré de $P(x^2 - A^2)$, ne sera pas inférieur au degré de $P(x^2 - D^2)$, puisque y est infini en même temps que x; supposons qu'il le surpasse de g unités. La limite de $y : x^{g+1}$, pour $x = \infty$, sera une quantité finie; or

$$\lim \frac{y}{x^{g+1}} = \lim \frac{\lambda^{-g-1}}{\lambda_1^{-1}} = \lim M \frac{(g+1)\lambda^{-g-2}\lambda'}{\lambda_1^{-2}\lambda'_1} = M(g+1)\frac{\lambda'}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda_1^2}{\lambda'_1}\cdot\frac{1}{\lambda^g}$$

D'après (I, 30), la limite de $\frac{\lambda'}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda_1^2}{\lambda'_1}$ est la quantité finie $(-1)^a\frac{k}{l}$; pour que le second membre ait une limite finie, il faut donc que λ^{-g} soit fini ou que g soit égal à zéro. Donc $y : x$ a une limite finie pour $x = \infty$, et cette limite est

$$(-1)^a \frac{Mk}{l}$$

Mais, d'après l'expression algébrique de y, on a :

$$\lim \frac{y}{x} = m$$

Donc

$$\frac{M}{m} = \frac{l}{k}(-1)^a \qquad \text{(A)}$$

Dans le cas où y est irrationnel, on trouve de la même manière

$$\lim \frac{y}{x} = (-1)^a \frac{Mk}{l} = -mk,$$

donc

$$\frac{M}{m} = -(-1)^a l. \qquad \text{(B)}$$

« *Dans le cas où y est nul quand $x = \infty$, yx a une valeur finie pour* $x = \infty$. Soit

$$\varepsilon = K'\sqrt{-1}, \qquad x = \lambda\varepsilon = \infty.$$

Puisque $y = 0$, $\qquad \frac{\varepsilon}{M} = 2aL + 2bL'\sqrt{-1}.$

Considérons d'abord le cas où y est rationnel en x. L'expression yx^g

aura nécessairement une limite finie si g est convenablement choisi. Or, pour $x = \infty$.

$$\lim yx^g = \lim \frac{\lambda_1}{\lambda^{-g}} = -\lim \frac{1}{Mg} \mu_1 \nu_1 \frac{\lambda^2}{\lambda'} \lambda^{g-1}.$$

Pour que la limite du second membre soit finie, il faut que $g = 1$. On a ensuite (I, 30)

$$\lim yx = -\lim \frac{1}{M} \mu_1 \nu_1 \frac{\lambda^2}{\lambda'} = \frac{(-1)^a}{Mk}.$$

L'expression algébrique de y donne d'ailleurs $\lim yx = m$; donc

$$Mmk = (-1)^a. \qquad (C)$$

Dans le cas où y est irrationnel, on trouve de même que

$$\lim yx = \frac{(-1)^a}{Mk} = \lim m \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{x^2} = \lim m \frac{\lambda'}{\lambda^2} = -mk;$$

donc

$$Mmk^2 = -(-1)^a. \qquad (1)\ (D)$$

Valeurs de $\mu_1\varepsilon : \lambda_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon : \lambda_1\varepsilon$, *ou de* $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ *quand* $\lambda\varepsilon = \infty$; *valeur de* $\lambda_1\varepsilon : \lambda\varepsilon$ *quand* $\lambda\varepsilon = 0$. Il est utile de chercher ces valeurs qui conduisent à des formules dont nous nous servirons en même temps que de (A), (B), (C), (D). On trouve, si $\lambda_1\varepsilon = \infty$ pour $\lambda\varepsilon = \infty$, d'après (I, 30, 31)

$$\lim \frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = \lim \frac{\lambda_1^{-1}\varepsilon}{\mu_1^{-1}\varepsilon} = \frac{\lambda'_1\varepsilon}{M\lambda_1^2\varepsilon} : \frac{\mu'_1\varepsilon}{M\mu_1^2\varepsilon} = -\sqrt{-1}\,(-1)^b \qquad (E)$$

$$\lim \frac{\nu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = \lim \frac{\lambda_1^{-1}\varepsilon}{\nu_1^{-1}\varepsilon} = \frac{\lambda'_1\varepsilon}{M\lambda_1^2\varepsilon} : \frac{\nu'_1\varepsilon}{M\nu_1^2\varepsilon} = -\sqrt{-1}\,(-1)^{a+b}k \qquad (F)$$

---

(1) Ces deux théorèmes, pour le cas où y est irrationel n'ont pas encore été remarqués, mais pour le cas ou y est rationel, on peut les déduire de ce théorème d'ABEL : que y est de la forme $x + fx$, ou $fx : x$, fx étant une fonction de x finie pour $x = \infty$ (*OEuvres*, I, XIII, p. 260 et p. 267). JACOBI (*Fundamenta*, § 10) démontre des théorèmes qui, au premier abord, pourraient être confondus avec les précédents : si y est une fraction rationelle dont le numérateur est une fonction impaire de degré $2n - 1$ ou $2n + 1$, le dénominateur une fonction rationelle paire de degré $2n$, il est *probable* qu'une pareille valeur satisfera à l'équation différentielle donnée, car on aura pour déterminer les coëfficients du numérateur et du dénominateur un nombre d'équations suffisant en général. Mais il ne prouve pas, comme Abel, que c'est la seule forme possible de la solution. Comparez SANIO, § 4, p. 18 et KÖNIGSBERGER, § 3, p. 8. On n'a pas signalé encore les relations (A), (B), (C), (D).

Si, au contraire $\lambda_1\varepsilon = 0$ pour $\lambda\varepsilon = \infty$, puisque $\frac{E}{M} = 2aL + 2bL'\sqrt{-1}$

$$\mu_1\varepsilon = (-1)^{a+b} \quad (G) \qquad \text{et} \qquad \nu_1\varepsilon = (-1)^b \quad (H)$$

Enfin, dans tous les cas, pour $x = 0$, $y = 0$ et en supposant $\varepsilon = 0$

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\lambda_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon} = \frac{1}{M} \frac{\mu_1\varepsilon\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon} = \frac{1}{M} \qquad (J)$$

24. *Tous les facteurs rationnels qui entrent dans l'expression de y, dont la partie rationnelle est supposée réduite à sa plus simple expression sont des facteurs simples. Aucun d'eux ne s'annule en même temps que $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{1-k^2x^2}$, sauf au dénominateur de y dans le cas où cette fonction est irrationnelle en x*(1).

Soit $x - A_1$ un facteur du numérateur de y. On a pour $x = A$

$$\lim \frac{y}{x - A_1} = \lim \frac{\lambda_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon - A_1} = \lim \frac{1}{M} \frac{\lambda'_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = \frac{\pm 1}{M\sqrt{(1-A_1^2)(1-k^2A_1^2)}} \qquad (1)$$

valeur qui n'est pas nulle. Donc $x - A$ est un facteur simple du numérateur de y. On a ensuite

$$\frac{y}{x - A_1} = mx \frac{P(x^2 - A^2) : (x - A_1)}{P(x^2 - D^2)} \text{ ou} = mx\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \frac{P(x^2 - A^2) : (x^2 - A_1)}{P(x^2 - D^2)}.$$

Nous venons de voir que pour $x = A_1$ ces expressions ne sont pas nulles ; d'autre part, elles ne sont pas infinies, puisque aucun facteur du dénominateur de y, qui est réduit à sa plus simple expression, ne peut être égal à $x - A_1$; l'expression (1) étant finie, on n'a pas

$$A_1 = \pm 1 \quad \text{ou} \quad A_1 = \pm \frac{1}{k^2},$$

autrement dit, aucun facteur du numérateur ne s'annule en même temps que $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-k^2x^2}$.

On a ensuite pour $x = D_1$,

$$\lim y(x - D_1) = \lim \frac{\lambda\varepsilon - D}{\lambda_1^{-1}\varepsilon} = -\lim M\lambda'\varepsilon \frac{\lambda_1^2\varepsilon}{\lambda'_1\varepsilon} = -M \frac{\sqrt{(1-D_1^2)(1-k^2D_1^2)}}{\pm l} \quad (2)$$

(1) On n'a pas encore, que nous sachions, démontré ce théorème d'une manière générale avant d'avoir cherché les facteurs eux-mêmes. Nous dirons plus loin comment Abel et Jacobi évitent la considération du degré de multiplicité des facteurs du numérateur et du dénominateur de y, de $1 - y$, etc. La plupart des autres auteurs n'ont guère réussi sur ce point aussi bien que ces illustres géomètres

quantité qui n'est pas infinie. Tout facteur du dénominateur est donc un facteur simple. Soit de plus y rationnel en x; alors,

$$y(x - D_1) = mx \frac{P(x^2 - A^2)}{P(x^2 - D^2 : (x - D_1)}.$$

Nous venons de voir que pour $x = D_1$ cette expression n'est pas infinie; elle n'est pas nulle non plus, car le numérateur ne contient pas le facteur $(x - D_1)$, puisque y est réduit à sa plus simple expression. L'expression (2) n'étant pas nulle, on n'a pas

$$D_1 = \pm 1, \quad \text{ou} \quad D_1 = \pm \frac{1}{k},$$

autrement dit, aucun facteur du dénominateur ne s'annule en même temps que $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 - k^2x^2}$.

Il est facile de voir que cette dernière remarque ne peut être étendue au cas où y est irrationnel.

Nous verrons plus loin qu'il existe pour les fonctions $\sqrt{1 - y^2}$, $\sqrt{1 - l^2y^2}$ des propriétés analogues à celles qui sont démontrées ici pour y.

25. *Classification des transformations.* — Soit $\varepsilon = 2K$. On aura $x = 0$, $y = 0$ et

$$\frac{\varepsilon}{M} = 2pL + 2qL'\sqrt{-1}$$

p et q étant des nombres entiers. Par suite :

$$K = M(pL + qL'\sqrt{-1})$$

De même $$K'\sqrt{-1} = M(p'L + q'L'\sqrt{-1}).$$

On déduit de là, en posant, $n = pq' - p'q$,

$$ML = \frac{q'K - qK'\sqrt{-1}}{n}, \qquad ML'\sqrt{-1} = \frac{pK'\sqrt{-1} - p'K}{n}.$$

Dans les transformations que nous considérons, p, q, p', q', n'ont pas des valeurs quelconques : ces nombres doivent être tels, par exemple, que pour $x = \infty$, $y = \infty$, ou $y = 0$ etc.; de là un moyen de classer les transformations d'après la parité ou l'imparité de p, q, p', q'.

Soit $\varepsilon = K'\sqrt{-1} = M(p'L + q'L'\sqrt{-1})$; $x = \infty$; si $y = \infty$, il faudra que l'on ait p pair, q' impair, et si $y = 0$, que p' et q' soient pairs (I, 9, 12).

Soit $\varepsilon = K = M(pL + qL'\sqrt{-1})$; $x = 1$. Soit p pair, on aura $y = \pm\lambda(qL'\sqrt{-1}) = 0$ ou ∞ (I, 9, 12), selon que q est pair ou impair. Donc $x = 1$ annule le numérateur ou le dénominateur de y. Mais d'après le n° 24 cela ne peut arriver que dans les transformations irrationelles. Donc, dans les transformations rationelles, on doit supposer p impair. — D'autre part, dans une transformation irrationelle, si le facteur $1 - x^2$ n'est pas au dénominateur, y est nul pour $\varepsilon = K$ ou $x = \lambda\varepsilon = 1$, à cause du facteur $\sqrt{1 - x^2}$ du numérateur : on ne peut donc pas supposer p impair, car, si cela était, on aurait :

$$y = \lambda(pL + qL'\sqrt{-1}) = \pm\lambda(L + qL'\sqrt{-1}) = \pm 1 \quad \text{ou} \quad \pm l^{-1}$$

selon que q est pair ou impair. Si $1 - x^2$ est un facteur du dénominateur, $y = \infty$ pour $\varepsilon = K$ ou $x = 1$, et on démontre comme plus haut que p est pair. Les transformations rationelles sont donc caractérisées par p impair, les irrationelles par p pair.

Nous avons par conséquent à considérer quatre classes de transformations, d'après la parité ou l'imparité de p et de q' :

1° *q' impair, p impair, n impair :* transformations rationelles où $y = \infty$ pour $x = \infty$. 2° *q' impair, p pair, n pair :* transformations irrationelles où $y = \infty$ pour $x = \infty$. 3° *q' pair, p impair, n pair;* transformations, rationelles où $y = 0$ pour $x = \infty$. 4° *q' pair, p pair, n pair :* transformations irrationelles où $y = 0$ pour $x = \infty$.

Dans toutes ces transformations, p' est pair, ce qui est digne de remarque, et on peut supposer q pair ou impair. Il est facile de s'assurer d'ailleurs, que, si $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ ou $x = k^{-1}$, on n'a pas $y = 0$ ou $y = \infty$, dans le cas des transformations rationelles, ce qui est d'accord avec le n° 24; que dans le cas des transformations irrationnelles on a toujours, au contraire, $y = 0$, ou $y = \infty$ pour cette valeur de ε, comme cela doit être(1).

Les relations entre K, $K'\sqrt{-1}$, L, $L'\sqrt{-1}$, prennent des formes simples, en supposant l'un de ces quatre nombres p, p', q, q' égal à l'unité

---

(1) Une classification des diverses transformations fondées sur la parité et l'imparité de p, q, p', q' se trouve dans Briot et Bouquet, § 215, p. 250. Elle est applicable aussi aux transformation irrationelles.

et deux autres nuls. On trouve que cette hypothèse donne les relations suivantes entre K, $K'\sqrt{-1}$, L, $L'\sqrt{-1}$.

1re *classe :* $p = n$ *impair* ou $q' = n$ *impair*

$$K = MnL \quad \text{et} \quad K'\sqrt{-1} = ML'\sqrt{-1}$$

ou

$$K = ML \quad \text{et} \quad K'\sqrt{-1} = MnL'\sqrt{-1}.$$

2de *classe :* $p = n$ *pair*

$$K = MnL \quad \text{et} \quad K'\sqrt{-1} = ML'\sqrt{-1}.$$

3me *classe :* $q' = n$ *pair*

$$K = ML \quad \text{et} \quad K'\sqrt{-1} = MnL'\sqrt{-1}.$$

4me *classe :* $p' = n$ *pair*

$$K = ML'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad K'\sqrt{-1} = nML.$$

Les cas particuliers où $n = 2$ sont remarquables, parce qu'ils conduisent à la plus ancienne transformation connue, dont les travaux de Richelot ont montré toute l'importance(1).

26. *Mode de détermination des valeurs de* y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$. On a

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon_1 = M(2aL + 2bL'\sqrt{-1})$$

$$\sqrt{1-y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon_2 = M\left[(2a+1)L + 2bL'\sqrt{-1}\right]$$

$$\sqrt{1-l^2y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon_3 = M\left[(2a+1)L + (2b+1)L'\sqrt{-1}\right]$$

$$y,\ \sqrt{1-y^2},\ \sqrt{1-l^2y^2} = \infty \quad \text{pour} \quad \varepsilon_4 = M\left[2aL + (2b+1)L'\sqrt{-1}\right]$$

Les valeurs ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 peuvent s'exprimer au moyen de K et $K'\sqrt{-1}$, grâce aux relations

$$K = M(pL + qL'\sqrt{-1}) \qquad K'\sqrt{-1} = M(p'L + q'L'\sqrt{-1})$$

Il en résulte que l'on aura, si le problème de la transformation est possible,

$$y = m\lambda\varepsilon P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_1}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_4} \qquad \text{ou} \qquad y = m\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\varepsilon P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_1}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_4}$$

$$1 - y^2 = m_1 P\,\frac{(\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_2)^{h_1}}{(\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_4)^2} \qquad 1 - l^2y^2 = m_2 P\,\frac{(\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_3)^{h_2}}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2\varepsilon_4)^2}.$$

---

(1) Voir l'Introduction, p. 15, note 2. La transformation simple de quatrième classe correspondant à $K = ML'\sqrt{-1}$, et $K'\sqrt{-1} = nML$ n'a pas encore été étudiée spécialement.

On examine dans chaque cas particulier de combien de valeurs distinctes sont susceptibles les expressions $\lambda^2\varepsilon_1$, $\lambda^2\varepsilon_2$, $\lambda^2\varepsilon_3$, $\lambda^2\varepsilon_4$, lorsque a et b reçoivent toutes les valeurs possibles; ensuite au moyen de la théorie des fonctions qui prennent la forme $\frac{0}{0}$, on détermine les exposants h_1 et h_2. Pour trouver m, m_1, m_2, on donne à ε des valeurs particulières. Dans plusieurs cas, on pourra trouver de la même manière les valeurs de $1 \pm y$, $1 \pm ly$.

Quand il s'agit des transformations simples dont il est parlé au numéro précédent, on est conduit, en opérant ainsi, d'une manière très naturelle à la valeur de y, de $\sqrt{1-y^2}$, et de $\sqrt{1-l^2y^2}$. La détermination des valeurs distinctes de $\lambda\varepsilon_1$, $\lambda\varepsilon_2$, $\lambda\varepsilon_3$, $\lambda\varepsilon_4$ est même plus simple que dans le problème de la multiplication. Cela provient de ce que toutes les valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, que l'on doit considérer, sont des multiples de l'une d'elle aux constantes près K, $K + K'\sqrt{-1}$, $K'\sqrt{-1}$.

Les transformations générales jouissent d'une propriété correspondante qui repose sur un théorème d'arithmétique que nous allons maintenant démontrer (1).

27. *Démonstration d'un théorème d'arithmétique. — Si les quatre nombres p, q, p', q' n'ont pas de diviseur commun, l'on peut trouver un nombre* R, *tel que, si l'on pose*

$$Z = p - qR$$
$$Z' = p' - q'R$$

les nombres Z et Z' soient premiers entre eux.

Supposons que, pour une certaine valeur de R, Z et Z' aient un diviseur commun d_1, et soient

$$Z = p - qR = \mu d_1 \qquad Z' = p' - q'R = \mu' d_1 \qquad (1)$$

(1) Jacobi *Fundamenta*, § 20, p. 36 et Abel I, XII, n° 42, p. 231 ont donné cette propriété pour les transformations de la première classe; Sanio l'a étendue à celle de seconde et de troisième classe. Comparez aussi Abel, I, XIII passim, XXI ch. IV, § 7, p. 390. Mais ces géomètres ne s'occupent guère, d'une manière générale, des relations qui existent entre les périodes de x et de y. Königsberger, *die Transf.*, § 22, p. 68, envisage au contraire la question sous ce point de vue, comme cela était nécessaire dans un exposé de la théorie de la transformation par les fonctions Θ. C'est à cet auteur, § 21, p. 65, que nous empruntons l'important théorème du n° 27.

on tire de là :

$$Zq' - Z'q = pq' - p'q = n = d_1(\mu q' - \mu' q);$$

n est donc divisible par d_1. Tous les nombres Z et Z' qui ont ainsi un diviseur commun d_1, seront dits appartenir à la classe 1. Si les diviseurs premiers de n sont $d_1, d_2 \ldots d_h$, on peut imaginer h classes correspondantes de nombres Z, Z' non premiers entr'eux; on place dans une seule classe ceux qui auraient deux ou plusieurs diviseurs premiers communs.

Si deux nombres Z et Z' appartiennent à la classe 1, on ne peut pas supposer que q et q' soient divisibles à la fois par d_1, car des équations (1) résulterait que p et p' seraient aussi divisibles par d_1, ce qui est contraire à l'hypothèse que les quatre nombres entiers p, q, p', q' n'ont pas de facteur commun. Supposons donc que l'un des deux nombres q ou q', q par exemple, ne soit pas divisible par d_1 et considérons deux nombres Z_1 et Z_2 appartenant à la classe 1; on aura

$$Z_1 = p - qR_1 = \mu_1 d_1 \qquad Z_2 = p - qR_2 = \mu_2 d_1$$

$$Z_1 - Z_2 = q(R_2 - R_1) = (\mu_1 - \mu_2) d_1$$

la différence $R_2 - R_1$ doit donc être divisible par d_1. Ainsi tous les nombres R relatifs à une même classe 1 satisfont à la congruence :

$$R \equiv R_1 \pmod{d_1}$$

R_1 étant l'un de ces nombres, si q n'est pas divisible par d_1. Si c'est q' qui n'est pas divisible par d_1, en partant des égalités :

$$Z'_1 = p' - q'R_1 = \mu'_1 d_1 \qquad Z'_2 = p' - q'R_2 = \mu'_2 d_1$$

on arrivera à la même conclusion.

Il résulte de là que tous les nombres R donnant des nombres Z et Z' non premiers entr'eux sont déterminés par les h congruences :

$$R \equiv R_1 \quad (\text{mod. } d_1)$$
$$R \equiv R_2 \quad (\text{mod. } d_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R \equiv R_h \quad (\text{mod. } d_h)$$

Il suffit de trouver un nombre R qui ne soit compris dans aucune de ces classes pour que, substitué dans $p - qR$, $p' - q'R$, il donne deux nombres premiers entr'eux. Il en sera évidemment ainsi du nombre R

satisfesant aux h congruences suivantes, incompatibles avec les précédentes :

$$R \equiv R_1 + 1 \quad (\text{mod. } d_1)$$
$$R \equiv R_2 + 1 \quad (\text{mod. } d_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R \equiv R_h + 1 \quad (\text{mod. } d_h)$$

Il est clair que l'on peut toujours trouver un nombre R satisfesant en effet à ces h congruences. Le théorème est donc démontré. — On peut démontrer un théorème analogue sur les formes $pR - q$, $p'R - q'$.

Lorsqu'on a trouvé un nombre R donnant deux nombres premiers Z et Z′ on peut en trouver une infinité de la manière suivante. Posons

$$Z_1 = Z \pm qn = p - q(R \mp n), \qquad Z'_1 = Z' \pm q'n = p' - q'(R \mp n)$$

on déduit de là :

$$Z_1 q' - Z'_1 q = n$$

Tout diviseur de Z_1 et Z'_1 diviserait aussi n, et par conséquent Z et Z′; ceux-ci étant premiers entr'eux, il en résulte qu'il en est de même de Z_1 et Z'_1. Dans les formes $p - qR$, $p' - q'R$, on peut donc remplacer R, par $R + mn$, m étant un nombre entier quelconque, sans que les nombres ainsi obtenus cessent d'être premiers entr'eux.

Voyons dans quel cas R est pair ou impair. Dans les transformations de première classe (p impair, q' impair) n est impair, R et $R + n$ sont de parité différente; par conséquent R peut être choisi indifféremment pair ou impair.

Dans les transformations de troisième classe (p impair, q' pair), on doit supposer R pair quand q est impair, car autrement Z et Z′ seraient tous deux pairs. Si q est pair, on peut prendre R pair ou impair à volonté. Soit, en effet, $n = 2^u\sigma$, σ étant un nombre impair. Considérons deux nombres Z_1 et Z'_1, tels que

$$Z_1 - Z \pm q \cdot \sigma = p - q\,(R \pm \sigma)$$
$$Z'_1 = Z' \pm q'\sigma = p' - q'(R \mp \sigma)$$

On aura

$$Z_1 q' - Z'_1 = n = 2^u\sigma.$$

Tout facteur commun de Z_1, qui est impair, et de Z'_1, qui est pair, diviserait σ et par suite Z et Z′; mais Z et Z′ sont premiers entre eux ; il en sera donc de même de Z_1 et Z'_1 et on peut remplacer dans les formes

$p - qR$, $p' - q'R$, R par $R + m\sigma$, sans que les nombres ainsi obtenus cessent d'être premiers entre eux ; σ étant impair, il en résulte que l'on peut supposer R pair ou impair. Si σ est égal à l'unité, toute valeur de R donne deux nombres premiers entr'eux Z et Z'.

Dans les transformations irrationnelles (p pair), on doit prendre R impair, autrement Z et Z' seraient tous deux pairs.

28. *Si nous posons*

$$\omega = \frac{ZK'\sqrt{-1} - Z'K}{n} \qquad (1)$$

on pourra exprimer ML *et* $ML'\sqrt{-1}$ *en* ω *de la manière suivante :*

$$ML = F\omega + GK + HK'\sqrt{-1} \quad (2) \qquad ML'\sqrt{-1} = F'\omega + G'K + H'K'\sqrt{-1} \quad (3)$$

F, F', G, G', H, H' *étant des nombres entiers.*

En remplaçant dans l'expression de ω, que nous venons de donner, K et $K'\sqrt{-1}$ par leurs valeurs en L et $L'\sqrt{-1}$, il viendra

$$\omega = \frac{M}{n}\left\{Z(p'L + q'L'\sqrt{-1}) - Z'(pL + qL'\sqrt{-1})\right\}$$

$$= \frac{M}{n}\left\{L(Zp' - Z'p) + L'\sqrt{-1}\,(Zq' - Z'q)\right\}$$

$$= \frac{M}{n}\left\{LRn + L'\sqrt{-1}\cdot n\right\}$$

d'après les valeurs de Z et Z'. Donc

$$\omega = M(LR + L'\sqrt{-1}).$$

Substituons cette valeur dans la relation (2) après y avoir remplacé K et $K'\sqrt{-1}$ par leur valeur en L et $L'\sqrt{-1}$, il viendra :

$$ML = FM(LR + L'\sqrt{-1}) + GM(pL + qL'\sqrt{-1}) + HM(p'L + q'L'\sqrt{-1})$$

relation qui est vérifiée si l'on a

$$1 = FR + Gp + Hp' \qquad 0 = F + Gq + Hq' \qquad (4)$$

En éliminant F entre ces deux équations, on trouve

$$1 = G(p - qR) + H(p' - q'R) \quad \text{ou} \quad 1 = GZ + HZ' \qquad (5)$$

Puisque Z et Z' sont premiers entre eux, on saura trouver d'une infinité de

manières, des valeurs entières de G et H qui satisfassent à (5); puis l'équation (4) donnera une valeur entière pour F.

On a ensuite :

$$ML'\sqrt{-1} = \omega - RML = \omega(1 - RF) - RGK - RHK'\sqrt{-1}.$$

Ainsi l'égalité (3) est vérifiée par les valeurs entières :

$$F' = 1 - RF = Gp + Hp'$$
$$G' = \quad -RG$$
$$H' = \quad -RH$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

L'égalité (5) donne lieu à une remarque utile. Soient G_1 et H_1 des solutions de cette équation. Toutes les autres sont données par les relations

$$G = G_1 - Z't \qquad H = H_1 + Zt.$$

Si Z et Z' sont impairs, l'un des nombres G_1 ou H_1 sera pair, d'après la relation (5); en faisant t impair G sera de parité opposée à G_1, H à H_1; en outre si G_1, par exemple, est pair, en prenant t pair d'une manière convenable, G sera divisible par 4. De même, si Z' est pair, t impair, Z et G sont impairs, H de parité opposée à H_1; si t est pair et choisi convenablement, H_1 étant pair, H sera divisible par 4. Enfin si Z est pair, t impair, Z' et H sont impairs, G de parité opposée à H_1; si t est pair et choisi convenablement, G_1 étant pair, G sera divisible par 4. En résumé, dans tous les cas, l'un des deux nombres G ou H est pair ou impair à volonté, et lorsqu'il est pair, il est divisible par 4 ou non, à volonté.

29. *Formes de* ML, $ML'\sqrt{-1}$, *en* ω, K, $K'\sqrt{-1}$ *dans les différentes classes de la transformation.* Les équations qui servent dans la détermination de cette forme, quant à la parité ou l'imparité de F, G, etc. sont les suivantes :

$$Z = p - qR, \qquad Z' = p' - q'R, \qquad 1 = GZ + HZ'$$
$$-F = Gq + Hq', \qquad F' = 1 - RF = Gp + Hp'$$
$$G' = -RG \qquad H' = -RH$$

trouvées précédemment. Nous allons montrer, par un exemple, comment on emploie ces équations. Soient p, q, q' impairs, p' pair (premier cas des transformations de première classe). Si R est impair, Z et Z' seront

respectivement pair et impair d'après les deux premières équations; la troisième équation prouve que H est impair; quant à G, il est pair ou impair; F sera impair ou pair, F', G' pairs ou impairs selon que G sera pair ou impair, H' sera impair, d'après les quatre dernières équations. La discussion est tout aussi facile dans le cas où R est pair, ou quand on fait d'autres hypothèses sur p, q, p' q'.

Nous allons donner ceux des résultats obtenus de cette manière qui nous serviront dans la suite. Dans le tableau suivant, les lettres latines représentent des nombres pairs, les lettres grecques des nombres impairs.

Transformations de première et de seconde classe (q' *impair*)

$$\mathrm{ML} = \varphi\omega + g\mathrm{K} + \eta\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

$$\mathrm{ML}'\sqrt{-1} = f'\omega + g'\mathrm{K} + \eta'\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$$

Dans les transformations *de première classe* (p, q' *impairs*)

si q est impair, $\quad \mathrm{R} = \rho, \quad \mathrm{Z} = z, \quad \mathrm{Z}' = \xi$

si q est pair $\quad \mathrm{R} = \rho, \quad \mathrm{Z} = \xi, \quad \mathrm{Z}' = \xi'$.

Dans les transformations *de seconde classe* (p *pair*, q' *impair*)

si q est impair, $\quad \mathrm{R} = \rho, \quad \mathrm{Z} = \xi, \quad \mathrm{Z}' = \xi'$

si q est pair $\quad \mathrm{R} = \rho, \quad \mathrm{Z} = z, \quad \mathrm{Z}' = \xi$.

Tranformations de troisième classe (p *impair*, q' *pair*)

si q est impair, $\mathrm{R} = r \qquad \mathrm{ML} = \varphi\omega + \gamma\mathrm{K} + h\mathrm{K}'\sqrt{-1}$

$\mathrm{Z} = \xi, \quad \mathrm{Z}' = z \qquad \mathrm{ML}'\sqrt{-1} = \varphi'\omega + g'\mathrm{K} + h'\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$

si q est pair, $\mathrm{R} = r \qquad \mathrm{ML} = f\omega + \gamma\mathrm{K} + h\mathrm{K}'\sqrt{-1}$

$\mathrm{Z} = \xi, \quad \mathrm{Z}' = z \qquad \mathrm{ML}'\sqrt{-1} = \varphi'\omega + g'\mathrm{K} + h'\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$

Transformation de quatrième classe (p pair, q' pair, q impair)

$\mathrm{R} = \rho \qquad \mathrm{ML} = \varphi\omega + \gamma\mathrm{K} + h\mathrm{K}'\sqrt{-1}$

$\mathrm{Z} = \xi, \quad \mathrm{Z}' = z \qquad \mathrm{ML}'\sqrt{-1} = f'\omega + \gamma'\mathrm{K} + h'\mathrm{K}'\sqrt{-1}.$

CHAPITRE II.

TRANSFORMATIONS RATIONNELLES OÙ y DEVIENT INFINI EN MÊME TEMPS QUE x (p, q' impairs, n impair).

§ I. *Première transformation : q impair*(1).

A. *Recherche des formules de la transformation en la supposant possible.*

30. *Détermination des valeurs de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ en supposant que le problème est possible.* On a (nº 29), n_1 étant la valeur absolue de n,

$$R = \rho, \quad n\omega = \alpha K'\sqrt{-1} - \xi K, \quad ML = \varphi\omega + gK + \eta K'\sqrt{-1}$$
$$ML'\sqrt{-1} = f'\omega + g'K + \eta' K'\sqrt{-1}$$
$$\lambda(\varepsilon + 2n_1\omega) = \lambda(\varepsilon \pm 2\alpha K'\sqrt{-1} \mp 2\xi K) = -\lambda\varepsilon$$
$$\mu(\varepsilon + 2n_1\omega) = \mu(\varepsilon \pm 2\alpha K'\sqrt{-1} \mp 2\xi K) = -\mu\varepsilon$$
$$\nu(\varepsilon + 2n_1\omega) = \nu(\varepsilon \pm 2\alpha K'\sqrt{-1} \mp 2\xi K) = \nu\varepsilon\ .$$

D'après (I, 9-12)

$$\lambda_1\varepsilon = 0 \text{ pour } \varepsilon = \varepsilon_1 = M\,(2aL + 2bL'\sqrt{-1}) = 2a'K + 2b'K'\sqrt{-1} + s\omega$$
$$\mu_1\varepsilon = 0 \quad \text{»} \quad \varepsilon = \varepsilon_2 = M[(2a+1)L + 2bL'\sqrt{-1}] = 2a'K + (2b'+1)K'\sqrt{-1} + \sigma\omega$$
$$\nu_1\varepsilon = 0 \quad \text{»} \quad \varepsilon = \varepsilon_3 = M[(2a+1)L + (2b+1)L'\sqrt{-1}] = 2a'K + 2b'K'\sqrt{-1} + \sigma\omega$$
$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1\varepsilon = \infty \quad \text{»} \quad \varepsilon = \varepsilon_4 = M[2aL + 1(2b+1)L'\sqrt{-1}] = 2a'K + (2b'+1)K'\sqrt{-1} + s\omega$$

a et b désignant des nombres entiers quelconques, s un nombre pair, σ un nombre impair, a' et b' des nombres entiers pairs ou impairs dépendant de a et b.

Réciproquement, si a' et b' sont des nombres quelconques, s un nombre pair, $\lambda_1\varepsilon$ sera nul pour $\varepsilon = 2a'K + 2b'K'\sqrt{-1} + s\omega$ car cette expression est égale à

$$s[M(L\rho + L'\sqrt{-1})] + 2a'[M(pL + qL'\sqrt{-1})] + 2b'[M(p'L + q'L'\sqrt{-1})] = M(2aL + 2bL'\sqrt{-1})$$

On trouverait de même en supposant s un nombre pair, σ un nombre

(1) Nous examinons en détail ce premier cas. Mais, dans les suivants, nous laisserons de côté tout ce qui présente une entière analogie avec celui-ci.

impair, a' et b' des nombres quelconques, que $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ s'annulent et que $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ deviennent infinis pour les valeurs indiquées plus haut.

En ajoutant à ces valeurs la quantité nulle $\xi K - zK'\sqrt{-1} + n\omega$ on trouve

$$\lambda_1\left[(2a'+1)K + 2b'K'\sqrt{-1} + \sigma\omega\right] = 0$$
$$\mu_1\left[(2a'+1)K + (2b'+1)K'\sqrt{-1} + s\omega\right] = 0$$
$$\nu_1\left[(2a'+1)K + 2b'K'\sqrt{-1} + s\omega\right] = 0$$
$$\lambda_1, \mu_1 \text{ ou } \nu_1\left[(2a'+1)K + (2b'+1)K'\sqrt{-1} + \sigma\omega\right] = \infty$$

s étant un nombre pair, σ un nombre impair, a' et b' des nombres entiers quelconques.

On conclut de ce qui précède que $\lambda^2\varepsilon$ prend la forme :

$\lambda^2(s\omega)$	ou $\lambda^2(K + \sigma\omega)$	quand $\lambda_1\varepsilon = 0$
$\lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)$	» $\lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)$	» $\mu_1\varepsilon = 0$
$\lambda^2(\sigma\omega)$	» $\lambda^2(K + s\omega)$	» $\nu_1\varepsilon = 0$
$\lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)$	» $\lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)$	» $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$ ou $\nu_1\varepsilon = \infty$

et réciproquement à ces valeurs de $\lambda^2\varepsilon$ correspondent toujours celles qui viennent d'être indiquées pour $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$.

On déduit immédiatement de là que y est de la forme

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon\,\frac{P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)\right]}{P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega\right]}.$$

On doit chercher toutes les valeurs de s qui donnent des facteurs différents au numérateur et au dénominateur, ces facteurs étant finis. On ne peut pas faire $s = 0$, car cela donnerait un facteur multiple au numérateur et un facteur infini au dénominateur. Il est inutile de supposer $s > n_1$, car, si $s = 2n_1 - s'$, $s' < n_1$, on a

$$\lambda^2(s\omega) = \lambda^2(2n_1\omega - s'\omega) = \lambda^2\left[\pm(2zK'\sqrt{-1} - 2\xi K) - s'\omega\right] = \lambda^2(s'\omega)$$

On prouve, comme dans la première partie, que toutes les valeurs de s inférieures à n_1 donnent pour $\lambda^2(s\omega)$ des valeurs distinctes. Au dénominateur s doit recevoir les mêmes valeurs qu'au numérateur ; on peut le voir directement, ou le déduire de l'égalité (I, 13)

$$\lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega) = \frac{1}{k^2\lambda^2(s\omega)}.$$

La valeur de y est donc

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)} = m\lambda\varepsilon \mathrm{P}\frac{\mu^2\varepsilon - \mu^2(s\omega)}{\mu^2\varepsilon - \mu^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)} = m\lambda\varepsilon \mathrm{P}\frac{\nu^2\varepsilon - \nu^2(s\omega)}{\nu^2\varepsilon - \nu^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

s recevant toutes les valeurs paires inférieures à n_1.

On peut trouver la valeur de $1-y^2$, et celle de $1-l^2y^2$ de la même manière que celle de y, ou bien les déduire des valeurs de $1+y$, $1-y$, $1+ly$, $1-ly$. Nous allons chercher $1-y^2$ en considérant cette expression comme le produit de $1+y$ par $1-y$, puis nous dirons comment on peut trouver $1-l^2y^2$ d'une manière directe. Cela montrera avec quelle facilité la méthode suivie ici donne immédiatement ces diverses fonctions.

Les valeurs de $1+y$, et de $1-y$ seront rationelles en x et auront même dénominateur que y; il suffit donc de chercher leur numérateur. Or $\lambda_1\varepsilon = \pm 1$, quand $\lambda\varepsilon$ est de la forme $\lambda(\mathrm{K}+\mathrm{K}\sqrt{-1}+s\omega)$, puisqu'on doit avoir pour la même valeur de ε, $\mu_1\varepsilon = 1-\lambda_1^2\varepsilon = 0$. Soit d'abord

$$\varepsilon = \mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1} = \mathrm{M}\left[(p+p')\mathrm{L}+(q+q')\mathrm{L}'\sqrt{-1}\right] = \mathrm{M}\left[(p+p'-1)\mathrm{L}+(q+q')\mathrm{L}'\sqrt{-1}+\mathrm{L}\right]$$

on aura

$$\lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}\lambda(\mathrm{L},l) = (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}$$

que nous représentons dans ce numéro par c.

Ensuite, soit

$$\varepsilon = \mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega = \mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\mathrm{M}(\mathrm{L}\rho+\mathrm{L}'\sqrt{-1});$$

il vient
$$\lambda_1\varepsilon = c(-1)^{\frac{s}{2}} = \pm c.$$

Si s est divisible par 4, on trouvera $+c$, sinon, on aura la valeur $-c$. Si on donne à ε des valeurs égales et de signes contraires, on arrive aussi à des résultats égaux mais de signes contraires pour $\lambda_1\varepsilon$.

Les facteurs du numérateur de $1-c\,\lambda_1\varepsilon$ sont donc ceux du produit suivant

$$(1-k\lambda\varepsilon)\mathrm{P}[\lambda\varepsilon\pm\lambda(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)]$$

le signe $+$ dans l'expression $\lambda\varepsilon\pm\lambda(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)$ étant employé quand s n'est pas divisible par 4, le signe $-$ dans le cas contraire; le premier facteur $1-k\lambda\varepsilon$ correspond à $s=0$.

Chacun de ces facteurs est à la seconde puissance dans l'expression cherchée, sauf le premier. En effet, si $1-k\lambda\varepsilon=0$, on a

$$\lim\frac{1-c\lambda_1\varepsilon}{1-k\lambda\varepsilon}=\pm\frac{1}{Mk}\times\lim\frac{\mu_1\varepsilon}{\nu\varepsilon}\times\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon}=\pm\frac{1}{Mk}\times\lim\frac{\lambda_1\varepsilon\nu_1\varepsilon}{Mk\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}\times\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon}=\text{quantité finie.}$$

Soit $\lambda\varepsilon-\lambda\varepsilon_1$ l'un des autres facteurs. On a, pour $\varepsilon=\varepsilon_1$:

$$\lim\frac{1-c\lambda_1\varepsilon}{(\lambda\varepsilon-\lambda\varepsilon_1)^2}=\pm\frac{1}{M}\times\lim\frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon-\lambda\varepsilon_1}\times\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}=\pm\frac{1}{M}\times\lim\frac{-\lambda_1\varepsilon\nu_1\varepsilon}{M\mu\varepsilon\nu\varepsilon}\times\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}=\text{quantité finie.}$$

On conclut de tout ce qui précède la valeur de $1-c\lambda_1\varepsilon$, puis celle de $1+c\lambda_1\varepsilon$ et de $\mu_1\varepsilon$:

$$1-(-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}\lambda_1\varepsilon=(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}m_1(1-k\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\frac{[\lambda\varepsilon\pm\lambda(K+K'\sqrt{-1}+s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

$$1+(-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}\lambda_1\varepsilon=(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}m_1(1+k\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\frac{[\lambda\varepsilon\mp\lambda(K+K'\sqrt{-1}+s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

$$\mu_1\varepsilon=\qquad m_1\qquad \nu\varepsilon\ \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+K'\sqrt{-1}+s\omega)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

Dans ces expressions, s reçoit toutes les valeurs paires inférieures à n_1; le signe des seconds membres a été obtenu en remarquant que pour $\varepsilon=0$, le premier est égal à l'unité.

On trouve, par un raisonnement analogue :

$$1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\mathfrak{D}_1\varepsilon=(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}m_2(1-\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\frac{[\lambda\varepsilon\pm\lambda(K+s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

$$1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\mathfrak{D}_1\varepsilon=(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}m_2(1+\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\frac{[\lambda\varepsilon\mp\lambda(K+s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

$$\nu_1\varepsilon=\qquad m_2\qquad \mu\varepsilon\,\mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

Si on avait cherché directement $\nu_1^2\varepsilon$, qui est rationnel en $\lambda\varepsilon$, on aurait trouvé que son numérateur contient tous les facteurs du produit

$$(1-\lambda^2\varepsilon)\,\mathrm{P}[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)]$$

Il est facile de prouver que chaque facteur, sauf le premier, entre au second

degré dans $\nu^2\varepsilon$. On trouve, en effet, des limites finies pour les expressions

$$\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon \pm \lambda(K + s\omega)}$$

quand le dénominateur s'annule.

31. *Détermination des constantes* m, m_1, m_2, M, l, l'. — Pour trouver ces constantes nous allons donner à ε diverses valeurs particulières. Nous avons déjà vu, en fesant $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ (n° 23, A), que

$$\frac{M}{m} = \frac{l}{k}(-1)^{\frac{p'}{2}} \tag{1}$$

Nous avons ensuite (n° 23) pour $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = K$ ou $M(pL + qL'\sqrt{-1})$ et $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ ou $M[(p + p')L + (q + q')L\sqrt{-1}]$(1).

$$1^\circ \lim \frac{\lambda_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon} = \frac{1}{M} = m \cdot P\frac{\lambda^2(s\omega)}{\lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = mk^{n_1-1}\, P\lambda^4(s\omega) \tag{2}$$

$$2^\circ\ \lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda(L + L'\sqrt{-1}, l) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{l} = mP\frac{\mu^2(s\omega)}{\mu^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} =$$

$$= (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} mk^{\frac{n_1-1}{2}}\, P\frac{\lambda^2(s\omega)\mu^2(s\omega)}{\nu^2(s\omega)} \tag{3}$$

$$3^\circ\ \lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} = \frac{m}{k}P\frac{\nu^2(s\omega)}{\nu^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = (-1)^{\frac{n_1-1}{2}}\frac{m}{k}P\frac{\nu^2(s\omega)\,\lambda^2(s\omega)}{\mu^2(s\omega)} \tag{4}$$

On tire de (2), (3), (4) les valeurs suivantes qui vérifient d'elles-mêmes l'équation (1).

$$m = (-1)^{\frac{p+p'-n_1}{2}} k\ P\frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)}$$

$$M = (-1)^{\frac{p+p'-n_1}{2}} \frac{1}{k^{n_1}}\, P\frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\mu^2(s\omega)}$$

$$= (-1)^{\frac{p'}{2}} \frac{1}{k^{n_1}}\, P\frac{\nu^4(s\omega)}{\mu^4(s\omega)}$$

(1) Nous employons très souvent les formules complémentaires (I, 13-21), mais nous croyons inutile de désigner chaque fois laquelle de ces formules nous donne la transformation indiquée dans le texte.

Soit encore $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ et $\varepsilon = 0$ dans $\mu_1\varepsilon$; on aura (n° 23)

$$1° \quad m_1 = \frac{\mu_1\varepsilon}{\nu\varepsilon} = \frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} \times \frac{\lambda_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon} \times \frac{\lambda\varepsilon}{\nu\varepsilon} = \frac{(-1)^{\frac{q'-1}{2}}}{\sqrt{-1}} \times m \times \frac{\sqrt{-1}}{k} = (-1)^{\frac{q'-1}{2}} \frac{m}{k}.$$

Donc

$$m_1 = (-1)^{\frac{p+p'+q'-n_1-1}{2}} \mathrm{P} \frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)} \tag{5}$$

$$2° \qquad 1 = m_1 \mathrm{P} \frac{\lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = m_1 \mathrm{P} \frac{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)}{\mu^2(s\omega)} \tag{6}$$

Donc

$$m_1 = \mathrm{P} \frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)}$$

En comparant ces deux valeurs de m_1, on trouve

$$(-1)^{\frac{p+p'+q'-n_1-1}{2}} = 1.$$

Or $n_1 = \pm(pq' - p'q)$; si l'on prend le signe supérieur :

$$p + p' + q' - n_1 - 1 = p + p' + q' - pq' + p'q - 1 = (p-1)(1-q') + p'(q+1)$$

si on prend le signe inférieur :

$$p + p' + q' - n_1 - 1 = p + p' + q' + pq' - p'q - 1 = (p+1)(1+q') + p'(1-q) + 2.$$

Le premier de ces deux nombres est divisible par 4, le second ne l'est pas. Donc *n doit être positif pour que la transformation soit possible*(1).

Soit fait, dans la valeur de $\mu_1\varepsilon$, $\varepsilon = K = M(pL + qL'\sqrt{-1})$; on aura :

$$\mu_1\varepsilon = (-1)^{\frac{p+q}{2}} \sqrt{-1}\,\frac{l'}{l} = m_1 k' \mathrm{P} \frac{\mu^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\mu^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = m_1 k'^n \mathrm{P} \frac{\lambda^2(s\omega)}{\mu^2(s\omega)\nu^2(s\omega)}$$

d'où, en remplaçant l et m_1 par leur valeur

$$\sqrt{-1}\,l' = (-1)^{\frac{p+q-p'}{2}} \left(\frac{k'}{k}\right)^n \mathrm{P} \frac{1}{\mu^4(s\omega)}$$

Pour trouver m_2, on fera $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, ou $\varepsilon = 0$ dans la valeur de $\nu_1\varepsilon$; on trouve :

$$m_2 = \frac{1}{k^{n-1}} \mathrm{P} \frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\mu^2(s\omega)}$$

---

(1) Ce théorème n'a encore été démontré que par la théorie des fonctions θ, KÖNIGSBERGER, § 8, p. 22.

En fesant $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ dans $\mu_1\varepsilon$ et $\nu_1\varepsilon$, $\varepsilon = K$ dans $\nu_1\varepsilon$, on retrouve sous une forme un peu différente, plusieurs des formules précédentes.

Les valeurs des constantes sont réunies dans le tableau suivant, où chacune d'elles est mise sous plusieurs formes différentes dont l'équivalence s'établit au moyen des formules (I, 13-21).

$$M = (-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} \frac{1}{k^n} \mathrm{P} \frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\mu^2(s\omega)} = (-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} \mathrm{P} \frac{\lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m = (-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} k \mathrm{P} \frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)} = (-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} k \mathrm{P} \frac{\lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m_1 = \mathrm{P} \frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\nu^2(s\omega)} = \mathrm{P} \frac{\lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m^2 = \frac{1}{k^{n-1}} \mathrm{P} \frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\mu^2(s\omega)} = k \mathrm{P} \frac{\lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$l = (-1)^{\frac{p'}{2}} \frac{1}{k^n} \mathrm{P} \frac{\nu^4(s\omega)}{\mu^4(s\omega)} = (-1)^{\frac{p'}{2}} \frac{1}{k^n} \mathrm{P} \frac{1}{\lambda^4(K + s\omega)}$$

$$l'\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{p+q-p'}{2}} \left(\frac{k'}{k}\right)^n \mathrm{P} \frac{1}{\mu^4(s\omega)} = (-1)^{\frac{p+q-p'}{2}} \left(\frac{k}{k'}\right)^{n-2} \mathrm{P}\mu^4(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)$$

32. *Autre forme des valeurs de y, $1 \pm y$, $1 \pm ly$, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-l^2y^2}$.* — Nous allons transformer les valeurs de ces fonctions au moyen des formules (I, 25-29). La formule (25) donne immédiatement

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon \mathrm{P} \frac{\lambda^2(s\omega) - \lambda^2\varepsilon}{\lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega) - \lambda^2\varepsilon} = mk^{n-1} \mathrm{P}\lambda^2(s\omega) \times \lambda\varepsilon \times \mathrm{P}\lambda(s\omega + \varepsilon)\lambda(s\omega - \varepsilon)$$

Mais, d'après une remarque faite au commencement de ce chapitre,

$$\lambda(s\omega - \varepsilon) = -\lambda(\varepsilon - s\omega) = +\lambda[\varepsilon + (2n - s)\omega]$$

on peut donc écrire :

$$\lambda_1\varepsilon = mk^{n-1} \mathrm{P}\lambda^2(s\omega) \mathrm{P}\lambda(\varepsilon + 2T\omega)$$

T étant un nombre entier qui prend toutes les valeurs depuis 0 jusque $n-1$.

On peut encore remarquer que

$$\lambda(\varepsilon + 2T\omega) = -\lambda(\varepsilon + 2T\omega + 2n\omega);$$

si 2T n'est pas divisible par 4, 2T + 2n le sera ; on peut donc ne laisser que des facteurs de la forme $\lambda(\varepsilon + 4T\omega)$ dans la formule et écrire

$$\lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{n-1}{2}} mk^{n-1}\, \mathrm{P}\, \lambda^2(s\omega)\, \mathrm{P}\, \lambda(\varepsilon + 4T\omega).$$

On pourrait dans ces formules remplacer $mk^{n-1}\mathrm{P}\lambda^2(s\omega)$ par

$$(-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} k^n \mathrm{P}\lambda^2(K + s\omega) = (-1)^{\frac{p+p'-n}{2}} \sqrt{k^n : l(-1)^{\frac{p'}{2}}}.$$

L'expression de $\lambda_1\varepsilon$ est la seule dont nous nous servirons dans les numéros suivants, mais on peut trouver de la même manière les valeurs de $1 \pm \lambda_1\varepsilon$, $1 \pm l\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$:

$$1 - (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} \lambda_1\varepsilon = \mathrm{P}\frac{1 \pm k\lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\nu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{1 - k\lambda(\varepsilon + 4T\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} \lambda_1\varepsilon = \mathrm{P}\frac{1 \mp k\lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\nu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{1 + k\lambda(\varepsilon + 4T\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$\mu_1\varepsilon = \mathrm{P}\frac{\nu(\varepsilon + 2T\omega)}{\nu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{\nu(\varepsilon + 4T\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \; l\lambda_1\varepsilon = \mathrm{P}\frac{1 \pm \lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{1 - \lambda(\varepsilon + 4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \; l\lambda_1\varepsilon = \mathrm{P}\frac{1 \mp \lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{1 + \lambda(\varepsilon + 4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$\nu_1\varepsilon = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{P}\frac{\mu(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = \mathrm{P}\frac{\mu(\varepsilon + 4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

Dans les facteurs où entre le double signe, on doit choisir le signe supérieur ou inférieur selon que T est impair ou pair.

B. *Vérification de la solution.*

33. *Détermination de $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ en supposant $\lambda_1\varepsilon$ connu.* Nous avons trouvé les valeurs de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$, en supposant que le problème de la transformation ait une solution. Pour vérifier cette solution, nous allons considérer $\lambda_1\varepsilon$ ou y comme une expression algébrique, et en déduire $\sqrt{1-y^2}$, et $\sqrt{1-l^2y^2}$; nous verrons que ces fonctions sont égales aux valeurs

trouvées pour $\mu_1\varepsilon$ et $\nu_1\varepsilon$, pourvu que les constantes m et l soient déterminées par les conditions

$$y = (-1)^{\frac{p-1}{2}} l \qquad \text{si} \quad x = 1, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = K$$

$$y = (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} = c \qquad \text{si} \quad x = k^{-1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = K + K'\sqrt{-1}.$$

D'après ce qui précède, on ne peut pas faire d'autre hypothèse sur la valeur de y pour $\varepsilon = K$ et $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$.

Avant de chercher les valeurs de $\sqrt{1-y^2}$ et $\sqrt{1-l^2y^2}$ nous démontrerons quelques propriétés de l'expression

$$\lambda_1\varepsilon = y = m\,\lambda\varepsilon\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = m'\,P\,\lambda(\varepsilon + 4T\omega).$$

Il est évident d'abord que $y = 0$ pour $\varepsilon = 0$, et $y = \infty$ pour $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$.

Ensuite 4ω est une période de y et de $\frac{dy}{d\varepsilon}$. En effet

$$\lambda_1(\varepsilon + 4\omega) = m' \cdot P \cdot \lambda(\varepsilon + 4T\omega) \times \frac{\lambda(\varepsilon + 4n\omega)}{\lambda\varepsilon} = \lambda_1\varepsilon \times \frac{\lambda(\varepsilon + 4n\omega)}{\lambda\varepsilon} = \lambda_1\varepsilon$$

En prenant la dérivée logarithmique de y, on trouve

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = yS\,\frac{\lambda'(\varepsilon + 4T\omega)}{\lambda(\varepsilon + 4T\omega)}$$

S désignant le signe sommatoire ordinairement usité. Si, dans le second membre, on change ε en $\varepsilon + 4\omega$, y ne change pas, la somme augmente de

$$\frac{\lambda'(\varepsilon + 4n\omega)}{\lambda(\varepsilon + 4n\omega)} - \frac{\lambda'\varepsilon}{\lambda\varepsilon} = 0$$

c'est-à-dire qu'elle ne varie pas; 4ω est donc une période de $\frac{dy}{d\varepsilon}$; d'ailleurs on peut conclure ce théorème sur $\frac{dy}{d\varepsilon}$ de cet autre qu'une fonction et sa dérivée ont toujours les mêmes périodes.

Cela posé cherchons la valeur $1 - \lambda_1\varepsilon$. Cette fonction est rationelle en $\lambda\varepsilon$. Soit D le dénominateur $P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)\right]$ de $\lambda_1\varepsilon$, N son numérateur, qui est premier avec D; on aura

$$1 - c\lambda_1\varepsilon = \frac{D - cN}{D} = \frac{N_1}{D}$$

Il est clair que N_1 sera premier avec D, et de même degré que N, c'est-à-dire de degré n en $\lambda\varepsilon$. Les facteurs du produit

$$P\left[\lambda\varepsilon - \lambda(K + K'\sqrt{-1} + 4a\omega)\right]$$

seront tous facteurs de N_1, car par hypothèse pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ ou $x = k^{-1}$, $y = c$, et 4ω est une période de y et de $1 \pm y$. On prouve aisément que les facteurs distincts du produit précédent sont compris dans l'expression :

$$(1 - k\lambda\varepsilon)\left[\lambda\varepsilon \pm \lambda(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)\right]$$

où s a la signification ordinaire, le signe supérieur correspondant aux valeurs de s qui ne sont pas divisibles par 4, le signe inférieur aux autres.

Cherchons le degré de multiplicité de chacun de ces facteurs et d'abord du premier. Pour cela, voyons qu'elle est la limite de

$$\frac{1 - cy}{1 - kx} \qquad (1)$$

pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ ou $x = k^{-1}$. Cette limite sera finie ou nulle selon que $1 - kx$ sera une ou plusieurs fois facteur de $1 - cy$ mais elle ne sera pas infinie. Or, cette limite est égale, à un facteur constant près, à celle de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varepsilon} : \frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{yS\dfrac{\lambda'(\varepsilon + 4T\omega)}{\lambda(\varepsilon + 4T\omega)}}{\mu\varepsilon \cdot \nu\varepsilon}$$

Au dénominateur $\nu\varepsilon = \nu(K + K'\sqrt{-1}) = 0$; pour que l'expression (1) ne devienne pas infinie pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$, on doit avoir $\dfrac{dy}{d\varepsilon} = 0$; comme y n'est pas nul, il en résulte aussi

$$S\frac{\lambda'(\varepsilon + 4T\omega)}{\lambda(\varepsilon + 4T\omega)} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon = K + K'\sqrt{-1}\,;$$

$\dfrac{dy}{d\varepsilon}$ et S sont nuls aussi pour $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1} + 4a\omega$ puisque 4ω est une période de $\dfrac{dy}{d\varepsilon}$, et de S. Nous déduisons de là le degré de multiplicité de

chaque facteur de $1 - cy$. En effet soit $\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1$ un facteur de cette expression, différent de $1 - k\lambda\varepsilon$; on trouve pour $\varepsilon = \varepsilon_1$

$$\lim \frac{1 - cy}{\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1} = - c \lim \frac{\frac{dy}{d\varepsilon}}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon};$$

si $\varepsilon_1 = K + K'\sqrt{-1} + 4a\omega$, le dénominateur n'est pas nul, (a n'étant pas égal à un multiple de n), le numérateur, au contraire, est égal à zéro; donc le facteur correspondant entre au moins deux fois au numérateur de $1 - cy$. On en conclut que

$$1 - (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} m_1 (1 - k\lambda\varepsilon) \mathrm{P} \frac{[\lambda\varepsilon \pm \lambda(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)}$$

car, si on suppose un autre degré de multiplicité aux facteurs du numérateur, ou d'autres facteurs dans ce numérateur, ou bien l'on va à l'encontre de ce qui vient d'être démontré, ou bien le degré de ce numérateur devient supérieur à n.

On trouve de la même manière

$$1 + (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}} y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} m_1 (1 + k\lambda\varepsilon) \mathrm{P} \frac{[\lambda\varepsilon \mp \lambda(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)}$$

et par conséquent

$$\sqrt{1 - y^2} = \pm m_1 \nu\varepsilon \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega}$$

Nous avons mis le double signe devant le second membre, parce que, si l'on se place au point de vue purement algébrique, rien ne détermine ce signe. Mais nous savons que, s'il y a une solution du problème de la transformation, on doit prendre le signe $+$ puisque pour $\varepsilon = 0$ il faut que $\sqrt{1 - y^2}$ se réduise à $+1$, de même que $1 \pm y$.

En suivant une marche analogue à la précédente, on démontre que $1 \pm ly$, $\sqrt{1 - l^2y^2}$ ont précisément les valeurs trouvées à priori pour $1 \pm l\lambda_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$. On a d'ailleurs

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\frac{\lambda'(\varepsilon + 4\mathrm{T}\omega)}{\lambda(\varepsilon + 4\mathrm{T}\omega)} = 0$$

quand $\varepsilon = K$; théorème analogue à celui qui a été trouvé plus haut, et

qui pourrait au besoin s'en déduire, comme on le verra dans le chapitre V, à l'occasion d'une recherche semblable.

La recherche des constantes m, m_1, m_2, l, l' se fait comme dans le cas où l'on cherche $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ à priori. On trouvera donc les mêmes valeurs que précédemment(1).

34. *Vérification de la solution.* — Nous emploirons la méthode d'Abel(2). Nous poserons

$$y=\frac{u}{v}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{w}{v^2}$$

$$1\pm y=m_1(1-kx)\frac{t^2}{v} \qquad 1\pm ly=m_2(1-x)\frac{t'^2}{v}$$

$$1\mp y=m_1(1+kx)\frac{t''^2}{v} \qquad 1\mp ly=m_2(1-x)\frac{t'''^2}{v}$$

u, v, t, t', t'', t''', w étant des polynômes en x de degré n, $n-1$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $2n-2$. En dérivant la valeur de $1\pm y$, on trouvera

$$w=t\cdot w'$$

w' étant un polynome entier. Il résulte de là que t divise w, et il en est de même de t', t'', t'''; t, t', t'', t''' étant premiers entre eux, le produit $tt't''t'''$ de degré $2n-2$ divise aussi w qui est de même degré; le quotient est donc une constante. Cela posé, on remarque que l'on a

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}=\frac{w}{m_1m_2\,t\,t'\,t''\,t'''}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{M'}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

(1) Nous aurions pu éviter la considération de la multiplicité des facteurs de $1\pm y$, ou $1\pm ly$, en déduisant de ces expressions la valeur de y, au lieu de suivre la marche inverse; on n'a pas besoin, dans ce cas, du théorème $S=0$ pour $\varepsilon=K$ et $\varepsilon=K+K\sqrt{-1}$. C'est la méthode suivie par Jacobi, mais elle n'est pas applicable à toutes les transformations, et les auteurs qui se sont occupés des cas laissés de côté par Jacobi et Abel, ont presque tous admis sans démonstration rigoureuse que $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ n'ont que des facteurs simples.

(2) Abel, *Œuvres*, I, XII, n° 44, p. 253; XIII, 265. Ce mode de vérification nous semble surpasser en élégance et en simplicité, dans les cas des transformations rationnelles, même la belle analyse de Jacobi.

M′ étant une constante. La valeur de cette constante est d'ailleurs celle que l'on a trouvée pour M. En effet, on a :

$$\frac{1}{M'} = \frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.$$

Or pour $x = 0$, on a (n° 31)

$$\frac{1}{M'} = \lim\frac{dy}{dx} = \lim\frac{y}{x} = \frac{1}{M}.$$

§ II. *Seconde transformation : q* pair.

35. *Transformation générale.* La seconde transformation ressemble tellement à la première que nous pouvons omettre les raisonnements et les calculs qui s'y rapportent et ne donner que les résultats. Nous ferons remarquer en outre que c'est cette transformation qui est étudiée avec tous les détails nécessaires dans les *Fundamenta* de Jacobi.

Dans le cas actuel, nous supposons ;

$$R = \rho \qquad ML = \varphi\omega + gK + \eta K'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = \xi K'\sqrt{-1} - \xi' K \qquad ML'\sqrt{-1} = f'\omega + g'K + \eta' K'\sqrt{-1}$$

On trouve :

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon P\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$
$$= mk^{n-1}P\lambda^2(s\omega)P\lambda(\varepsilon+2T\omega) = mk^{n-1}P\lambda^2(s\omega)P\lambda(\varepsilon+4T\omega)$$

$$1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda_1\varepsilon = m_1(1-\lambda\varepsilon)P\frac{[\lambda\varepsilon \pm \lambda(K+s\omega)]^2}{\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)-\lambda^2\varepsilon}$$
$$= k^{n-1}P\frac{1\pm\lambda(\varepsilon+2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = k^{n-1}P\frac{1-\lambda(\varepsilon+4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda_1\varepsilon = m_1(1+\lambda\varepsilon)P\frac{[\lambda\varepsilon \mp \lambda(K+s\omega)]^2}{\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)-\lambda^2\varepsilon}$$
$$= k^{n-1}P\frac{1\mp\lambda(\varepsilon+2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = k^{n-1}P\frac{1+\lambda(\varepsilon+4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$\mu_1\varepsilon = m_1\mu\varepsilon P\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K+s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)} = k^{n-1}P\frac{\mu(\varepsilon+2T\omega)}{\mu^2(s\omega)} = k^{n-1}P\frac{\mu(\varepsilon+4T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$1-(-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}D\lambda_1\varepsilon = m_2(1-k\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\,\frac{[\lambda\varepsilon\pm\lambda(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)]^2}{\lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)-\lambda^2\varepsilon}$$
$$=\mathrm{P}\,\frac{1\pm k\lambda(\varepsilon+2\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}=\mathrm{P}\,\frac{1-\lambda(\varepsilon+4\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$1+(-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}D\lambda_1\varepsilon = m_2(1+k\lambda\varepsilon)\,\mathrm{P}\,\frac{[\lambda\varepsilon\mp\lambda(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)]^2}{\lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)-\lambda^2\varepsilon}$$
$$=\mathrm{P}\,\frac{1\mp k\lambda(\varepsilon+2\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}=\mathrm{P}\,\frac{1+\lambda(\varepsilon+4\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$\nu_1\varepsilon = m_2\nu\varepsilon\mathrm{P}\,\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{P}\,\frac{\nu(\varepsilon+2\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}=\mathrm{P}\,\frac{\nu(\varepsilon+4\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

Dans les expressions précédentes quand un facteur contient un double signe, on prend le signe supérieur ou le signe inférieur selon que T est impair ou pair.

La détermination des constantes m_1 et m_2 conduit encore à cette conclusion importante que n doit être positif. On trouve d'ailleurs que les valeurs des constantes sont les suivantes :

$$\mathrm{M}=(-1)^{\frac{p-n}{2}}\mathrm{P}\,\frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\,\nu^2(s\omega)}=(-1)^{\frac{p-n}{2}}\mathrm{P}\,\frac{\lambda^2(\mathrm{K}+s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m=(-1)^{\frac{p-n}{2}}\mathrm{P}\,\frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\,\mu^2(s\omega)}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{P}\,\frac{\lambda^2(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m_1=(-1)^{\frac{q'-1}{2}}m=\mathrm{P}\,\frac{\nu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\,\mu^2(s\omega)}=\mathrm{P}\,\frac{\lambda^2(\mathrm{K}+\mathrm{K}'\sqrt{-1}+s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m_2=(-1)^{\frac{q'-1}{2}}\mathrm{M}=\mathrm{P}\,\frac{\mu^2(s\omega)}{\lambda^2(s\omega)\,\nu^2(s\omega)}=\mathrm{P}\,\frac{\lambda^2(\mathrm{K}+s\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$l=(-1)^{\frac{p'}{2}}k^n\mathrm{P}\,\lambda^4(s\omega+\mathrm{K})=(-1)^{\frac{p'}{2}}k^n\mathrm{P}\,\frac{\mu^4(s\omega)}{\nu^4(s\omega)}$$

$$l'=(-1)^{\frac{q}{2}}k'^n\mathrm{P}\,\frac{1}{\nu^4(s\omega)}=(-1)^{\frac{q}{2}}\frac{1}{k'^{n-2}}\mathrm{P}\,\nu^4(\mathrm{K}+s\omega)$$

La vérification de cette solution se fait absolument comme dans le cas précédent.

Remarque. Une comparaison, même superficielle, des formules trouvées dans les deux transformations examinées dans ce chapitre, fait voir qu'elles

sont dans un rapport intime. Il serait facile de prouver que la seconde peut se déduire de la première, par une transformation de premier degré, obtenue en fesant $n = 1$ dans celle-ci; mais nous croyons pouvoir laisser de côté ce qui rapporte aux relations qui existent entre les diverses transformations, parce que cela ne se rattache pas assez à notre objet, qui est l'étude *directe* de ces transformations.

36. *Transformations simples.* C'est à la transformation que nous venons d'étudier que se rattachent les cas particuliers les plus remarquables. Soit, d'abord, $K = MnL$, $K'\sqrt{-1} = ML'\sqrt{-1}$, $p = n$, $q = 0$, $p' = 0$, $q' = 1$; $r = 1$; il viendra :

$$\omega = \frac{nK'\sqrt{-1} + K}{n} = K'\sqrt{-1} + \frac{K}{n}$$

Cette valeur donne la première transformation réelle de Jacobi ($k < 1$).

Soit, en second lieu, $K = ML$, $K'\sqrt{-1} = nML'\sqrt{-1}$, $p = 1$, $q = 0$, $p' = 0$, $q' = n$, $r = 1$; on trouvera

$$\omega = \frac{K'\sqrt{-1}}{n} + K$$

Cette valeur donne la seconde transformation réelle de Jacobi (1).

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS IRRATIONNELLES OÙ y DEVIENT INFINI EN MÊME TEMPS QUE x (p pair, q' impair, n pair).

§ I. *Première transformation : q pair.*

37. *Détermination des valeurs de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ en supposant le problème possible.* Nous supposons dans le cas actuel :

$$R = \rho, \qquad ML = \varphi\omega + gK + \gamma K'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = zK'\sqrt{-1} - \xi K, \qquad ML'\sqrt{-1} = f'\omega + g'K + \gamma' K'\sqrt{-1}$$

---

(1) Les transformations de ce paragraphe sont celles dont on s'est le plus occupé. Voir l'Introduction historique, n° 11-15.

On aura donc, en appelant n_1 la valeur absolue de n,

$$\lambda(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\lambda\varepsilon, \quad \mu(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\mu\varepsilon, \quad \nu(\varepsilon + 2n_1\omega) = \nu\varepsilon.$$

On trouve, comme dans le chapitre précédent, que l'on a respectivement

$$\lambda_1\varepsilon = 0, \quad \mu_1\varepsilon = 0, \quad \nu_1\varepsilon = 0, \quad \lambda_1\varepsilon,\ \mu_1\varepsilon \text{ ou } \nu_1\varepsilon = \infty$$

seulement dans le cas où, a étant un nombre quelconque, l'on a :

$$\lambda^2\varepsilon = \lambda^2(2a\omega), \quad \lambda^2\varepsilon = \lambda^2\left[K'\sqrt{-1} + (2a+1)\omega\right], \quad \lambda^2\varepsilon = \lambda^2(2a+1)\omega,$$

ou

$$\lambda^2\varepsilon = \lambda^2(K'\sqrt{-1} + 2a\omega).$$

La valeur de $\lambda_1\varepsilon$ sera donc de la forme

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\nu\varepsilon\, \mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda\varepsilon(2a\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + 2a\omega)}$$

On verrait encore comme plus haut, que $2a$ ne doit avoir que des valeurs positives non supérieures à n; on ne peut pas supposer non plus $a = 0$, parce que le numérateur contiendrait un facteur double et le dénominateur un facteur infini. Au numérateur on ne peut pas donner à $2a$ la valeur n_1, car le facteur résultant $\lambda^2\varepsilon - 1$ s'annulerait en même temps que $\mu\varepsilon$, ce qui serait contraire au n° 24. Au dénominateur, à cette valeur n_1 de $2a$ correspond le facteur $\lambda^2\varepsilon - \frac{1}{k^2}$ ou $-\frac{\nu^2\varepsilon}{k^2}$. On conclut de là que

$$\lambda_1\varepsilon = -mk^2\frac{\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon}\mathrm{P}\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)},$$

s désignant comme dans les cas précédents un nombre pair compris entre 0 et n_1.

On prouve encore sans peine que les facteurs du numérateur de $\mu_1^2\varepsilon$ sont ceux du produit

$$\mathrm{P}\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda\varepsilon(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)\right],$$

σ désignant un nombre impair compris entre 0 et n_1. Le degré de multiplicité de chacun de ces facteurs est égal à *deux*. Soit en effet $\varepsilon_1 = K'\sqrt{-1} + \sigma\omega$; on aura

$$\lim \frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1} = -\frac{1}{M}\lim\frac{\lambda_1\varepsilon\nu_1\varepsilon}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}, \text{ quantité finie.}$$

La limite de $\mu_1^2\varepsilon : (\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1)^2$ est donc finie. En extrayant la racine carrée de la valeur de $\mu^2\varepsilon$ à laquelle on est ainsi conduit, on trouve

$$\mu_1\varepsilon = \frac{m_1}{\nu\varepsilon} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} + s\omega)}.$$

De même,

$$\nu_1\varepsilon = \frac{m_2}{\nu\varepsilon} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} + s\omega)};$$

d'où

$$\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu_1\varepsilon} = \frac{m_2}{m_1} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} + \sigma\omega)}.$$

Si on remarque que n est pair et que

$$n\omega + \xi\mathrm{K} - z\mathrm{K}'\sqrt{-1} = 0$$

on verra que l'on peut remplacer, dans les valeurs de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$, $s\omega$ et $\sigma\omega$, par $s\omega + \mathrm{K}$, et $\sigma\omega + \mathrm{K}$.

On peut encore donner à $\lambda_1\varepsilon$ et à $\nu_1\varepsilon : \mu_1\varepsilon$ une autre forme qui nous sera très utile. On a, en effet, (I, 25)

$$\lambda_1\varepsilon = -mk^{n_1}\mathrm{P} \cdot \lambda^2(s\omega) \times \frac{\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon} \times \mathrm{P}\lambda(s\omega + \varepsilon)\lambda(s\omega - \varepsilon)$$

or,

$$\lambda(\varepsilon + n_1\omega) = \lambda(\varepsilon \pm z\mathrm{K}'\sqrt{-1} \mp \xi\mathrm{K}) = (-1)^{\frac{\xi \pm 1}{2}} \lambda(\varepsilon + \mathrm{K}) = (-1)^{\frac{\xi \pm 1}{2}} \frac{\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon}$$

$$\lambda(s\omega - \varepsilon) = \lambda[\varepsilon + (2n_1 - s)\omega]$$

le signe supérieur correspondant au cas où n est positif, le signe inférieur au cas contraire. On tire de là :

$$\lambda_1\varepsilon = -(-1)^{\frac{\xi \pm 1}{2}} mk^{n_1}\mathrm{P}\lambda^2(s\omega)\mathrm{P}\lambda(\varepsilon + 2\mathrm{T}\omega)$$

T étant un nombre qui prendra toutes les valeurs de 0 à $n_1 - 1$ inclusivement.

On trouve de la même manière :

$$\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu_1\varepsilon} = \frac{m_2}{m_1} k^{n_1}\mathrm{P}\lambda^2(\sigma\omega)\mathrm{P}\lambda[\varepsilon + (2\mathrm{T} + 1)\omega]$$

On peut introduire dans les dernières formules

$$\mathrm{P}\mu(\varepsilon + 2\mathrm{T}\omega), \qquad \mathrm{P}\mu[\varepsilon + (2\mathrm{T} + 1)\omega]$$

Pour le prouver, remarquons que l'on a, d'après ce qu'on a vu précédemment :

$$P\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}=P\frac{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)}$$

et par suite (I, 25, 26)

$$P\lambda(s\omega+\varepsilon)\lambda(s\omega-\varepsilon)\times P\nu^2(s\omega)=P\mu(s\omega+\varepsilon)\mu(s\omega-\varepsilon)$$

formule qui pour $\varepsilon=0$, donne

$$P\lambda^2(s\omega)=P\frac{\mu^2(s\omega)}{\nu^2(s\omega)}.$$

Mais,

$$\lambda(s\omega-\varepsilon)=\lambda[\varepsilon+(2n_1-s)\omega],\quad \mu(s\omega-\varepsilon)=-\mu[\varepsilon+(2n_1-s)\omega]$$

et $$k'\lambda\varepsilon\lambda(\varepsilon+n_1\omega)=(-1)^{\frac{z'}{2}}\mu\varepsilon\mu(\varepsilon+n_1\omega);$$

d'ailleurs $$(-1)^{\frac{n_1}{2}-1+\frac{z'}{2}}=(-1)^{\frac{q}{2}}.$$

Donc, $$k'P\lambda(\varepsilon+2T\omega)\times P\nu^2(s\omega)=(-1)^{\frac{q}{2}}P\mu(\varepsilon+2T\omega)$$

De même :

$$P\lambda[\varepsilon+(2T+1)\omega]\times P\nu^2(\sigma\omega)=(-1)^{\frac{n_1}{2}}P\mu[\varepsilon+(2T+1)\omega]$$

et $$P\lambda^2(\sigma\omega)=P\frac{\mu^2(\sigma\omega)}{\nu^2(\sigma\omega)}$$

On peut donc remplacer les produits en λ par ceux qui contiennent μ. Mais il est impossible de faire la même substitution au moyen des produits analogues en ν, car ils sont constants. On a, en effet,

$$\nu(\alpha+n_1\omega)\nu\alpha=(-1)^{\frac{z}{2}}k'$$

En fesant $\alpha=\varepsilon,\quad \varepsilon+2\omega,\ \varepsilon+4\omega,\dots\ \varepsilon+(n_1-2)\omega,$
puis, $\alpha=\varepsilon+\omega,\ \varepsilon+3\omega,\ \varepsilon+5\omega,\dots\ \varepsilon+(n_1-1)\omega$

et multipliant les égalités aussi obtenues entr'elles, on trouve :

$$P\nu(\varepsilon+2T\omega)=(-1)^{\frac{n_1 z}{4}}k'^{\frac{n_1}{2}}$$

puis, $$P\nu[\varepsilon+(2T+1)\omega]=(-1)^{\frac{n_1 z}{4}}k'^{\frac{n_1}{2}}$$

Ensuite, en fesant $\alpha = -2\omega,\ -4\omega,\ \ldots\ -(n_1-2)\omega$ et $\alpha = -\omega,$ $-3\omega,\ -5\omega \ldots\ -(n_1-1)\omega,$

$$P\nu^2(s\omega) = (-1)^{\frac{\varepsilon(n_1-2)}{4}} k'^{\frac{n_1-2}{2}}, \quad P\nu^2(\sigma\omega) = (-1)^{\frac{\varepsilon n_1}{4}} k'^{\frac{n_1}{2}}.$$

38. *Détermination des constantes.* Nous ferons, comme dans les cas précédents, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = K$, $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$, $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$. Mais, en outre, nous supposerons que $\varepsilon = \omega$ pour déterminer l' et prouver que n est un nombre positif.

Les substitutions $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ et $\varepsilon = 0$ donnent (nº 25, B, E, F, A)

$$M = -(-1)^{\frac{p'}{2}} ml \qquad m_1 = (-1)^{\frac{q'-1}{2}} mk^2 \qquad m_2 = (-1)^{\frac{p'+q'-1}{2}} mk^2 l$$

$$\frac{1}{M} = -mk^{n_1} P\lambda^4(s\omega) \quad m_1 = -k^2 P\frac{\lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2(s\omega)} \qquad m_2 = -\frac{1}{k^{n_1-2}} P\frac{1}{\lambda^2(s\omega)\,\lambda^2(\sigma\omega)}$$

D'où,

$$m = -(-1)^{\frac{q'-1}{2}} P\frac{\lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$M = (-1)^{\frac{q'-1}{2}} k^{n_1} P\lambda^2(s\omega)\,\lambda^2(\sigma\omega)$$

$$l = (-1)^{\frac{p}{2}} k^{n_1} P\lambda^4(s\omega)$$

Les substitutions $\varepsilon = K$, $\varepsilon = K + K'\sqrt{-1}$ ne donnent pas de relations différant essentiellement de celles que nous connaissons déjà. — Pour trouver l', nous ferons $\varepsilon = \omega = M(L\rho + L'\sqrt{-1})$ dans $\mu_1\varepsilon$. Il viendra

$$-\sqrt{-1}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}} \frac{l'}{l} = \frac{m_1}{\nu\omega} P \frac{\lambda^2\omega - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)}{\lambda^2\omega - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)}$$

d'où

$$l'\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{p'+\rho+1}{2}} k^{n_1} P\lambda^4(s\omega)\, P\frac{1 - k^2\lambda^2\omega\lambda^2(\sigma\omega)}{1 - k^2\lambda^2\omega\lambda^2(s\omega)}.$$

Substituons aussi ω dans la seconde forme de $\lambda_1\varepsilon$, et fesons $\varepsilon = 0$ dans la seconde forme de $\nu_1\varepsilon : \mu_1\varepsilon$. Il viendra :

$$(-1)^{\frac{\rho-1}{2}} \frac{1}{l} = -(-1)^{\frac{\xi\pm1}{2}} mk^{n_1} P\lambda^2(s\omega) P\lambda(2T+1)\omega$$

$$1 = \frac{m_2}{m_1} k^{n_1} P\lambda^2(\sigma\omega)\, P\lambda(2T+1)\omega$$

En divisant ces deux égalités l'une par l'autre, il vient :

$$1 = -(-1)^{\frac{\rho-1+\xi\pm 1}{2}} \frac{mm_1 l}{m_2} \mathrm{P} \frac{\lambda^2(s\omega)}{\lambda^2(\sigma\omega)} = (-1)^{\frac{\rho-1+\xi\pm1+q'-1+p'}{2}}$$

L'exposant de (-1) dans le second membre doit être divisible par 4. Or,

$$\rho - 1 + \xi + 1 + q' - 1 + p' = \rho - 1 + p' - q'\rho + p' = 2p' + (q'-1)(1-\rho) = 4a$$

$$\rho - 1 + \xi - 1 + q' - 1 + p' = 4a - 2$$

On doit donc prendre le signe supérieur dans $\xi \pm 1$, c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, que *n est positif*(1).

39. *Détermination des valeurs de* $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ *au moyen de celle de* $\nu_1\varepsilon : \mu_1\varepsilon$. Soit

$$\frac{\nu_1^2\varepsilon}{\mu_1^2\varepsilon} = u^2 = \frac{1 - l^2y^2}{1 - y^2}, \quad \text{d'où} \quad y^2 = \frac{u^2 - 1}{u^2 - l^2};$$

$$u = \frac{m_2}{m_1} \mathrm{P} \frac{\lambda^2 - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1} + \sigma\omega)} = \frac{m_2}{m_1} k^n \mathrm{P}\lambda^2(\sigma\omega) \cdot \mathrm{P}\lambda[\varepsilon + (2\mathrm{T}+1)\omega]$$

On prouve, comme dans le cas précédent, que u^2, et par suite y^2, ne change pas quand ε augmente de 2ω. Supposons que y^2 s'annule pour $\varepsilon = 0$; on déduira de cette hypothèse que le numérateur de y^2 contient seulement les facteurs du produit

$$\lambda\varepsilon(1 - \lambda^2\varepsilon)\,\mathrm{P}[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)]$$

Cherchons maintenant la limite de $y^2 : (1 \pm \lambda\varepsilon)$ pour $\lambda\varepsilon = \pm 1$; cette limite sera nulle ou finie selon que $1 \pm \lambda\varepsilon$ sera un facteur multiple ou simple de y^2. Or cette limite, à un facteur constant près, est égale à celle de

$$\frac{dy^2}{d\varepsilon} : \lambda'\varepsilon = \frac{2ul'^2}{u^2 - l^2} \frac{du}{d\varepsilon} : \mu\varepsilon\nu\varepsilon$$

Mais $\mu\varepsilon = 0$ quand $1 \pm \lambda\varepsilon = 0$, et $u^2 = 1$; donc, puisque la limite ne doit pas être infinie, il faut que

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon = \mathrm{K} \quad \text{et par suite pour} \quad \varepsilon = \mathrm{K} + 2a\omega$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs qui annulent y.

(1) Königsberger, § 8, semble ne démontrer ce théorème que pour les transformations rationnelles; mais il est évident que sa démonstration s'étend à tous les cas, et non pas seulement à ceux qu'il considère dans son ouvrage.

Si $\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1$ est un facteur différent de $1 \pm \lambda\varepsilon$, on trouve, à un facteur constant près, que la limite de $y : (\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1)$ est égale à celle de $\frac{du}{d\varepsilon} : \mu\varepsilon\nu\varepsilon$, qui est nulle. Ces facteurs entrent donc au moins au second degré au numérateur de y^2. Ce numérateur est égal, à un facteur constant près, à

$$\left\{\lambda\varepsilon\mu\varepsilon\, P[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)]\right\}^2;$$

car le degré de ce produit est égal à celui du numérateur de y^2 calculé au moyen de u^2, et, par conséquent, on ne peut supposer ni que le numérateur contienne d'autres facteurs que ceux que nous avons indiqués, ni que ceux-ci aient un autre degré de multiplicité.

Supposons maintenant que y soit infini en même temps que x. On en conclura que le dénominateur de y^2 contient tous les facteurs du produit

$$(-k^2\lambda^2\varepsilon)\, P\left[\lambda^2 - \lambda^2(K\sqrt{-1} + s\omega)\right]$$

En cherchant la limite de $\frac{1}{y^2} : (1 \pm k\lambda\varepsilon)$, nous trouverons que

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon = K + K'\sqrt{-1} + 2a\omega$$

puis en prouve, comme plus haut, que tous ces facteurs sont des facteurs doubles à l'exception du premier. Le produit

$$\left\{\nu\varepsilon P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)\right]\right\}^2$$

étant d'un degré inférieur d'une unité à celui du numérateur, est égal au dénominateur cherché de y^2, à un facteur constant près; car, s'il y avait un facteur en $\lambda\varepsilon$ de plus, on n'aurait pas $y = \infty$ pour $\lambda\varepsilon = \infty$.

On peut donc écrire

$$y = -mk^2 \frac{\lambda\varepsilon\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon} P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega + K'\sqrt{-1})}.$$

Pour trouver $1 - y^2$ et $1 - l^2y^2$, nous poserons $y^2 = U : V$,

$$V = \nu^2\varepsilon\, P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega + K'\sqrt{-1})\right]^2$$

U et V seront premiers entr'eux, ainsi que $V - U$ et $V - l^2U$; par conséquent, on aura, à cause de

$$\frac{1 - y^2}{1 - l^2y^2} = \frac{V - U}{V - l^2U} = \frac{m_1^2}{m_2^2} P\left[\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}\right]^2,$$

$$V - U = m_1^2\, P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)\right]^2,$$

$$V - l^2U = m_2^2\, P\left[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)\right]^2;$$

d'où, pour $1-y^2$ et $1-l^2y^2$, les valeurs précédemment assignées, puisque

$$1-y^2=\frac{V-U}{V}, \qquad 1-l^2y^2=\frac{V-l^2U}{V}.$$

Les constantes m, m_1, m_2, l, l' se déterminent comme on l'a vu dans la recherche à priori de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$.

40. *Vérification de la solution.* Nous emploirons la méthode de Jacobi. Soit

$$y=\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot u'}{\sqrt{1-k^2x^2}\cdot v'}; \quad v^2\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}=\frac{w}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

v' désignant le polynome $P[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K'\sqrt{-1}+s\omega)]$ de degré $n-2$, u' un polynome premier avec v' de degré $n-1$, w un polynome de degré $2n$. On a ensuite, α étant constant,

$$U\frac{du}{dx}(v^2-\alpha^2u^2)-\frac{u^2}{2}\frac{d}{dx}(v^2-\alpha^2u^2)=w\frac{uv}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=wu'v'.$$

Soit $\alpha^2=1$, V^2-U^2 sera le numérateur de $\mu_1\varepsilon$, dont tous les facteurs en x sont au carré; ils se trouvent donc à la première puissance dans la dérivée de $v^2-\alpha^2u^2$, et par conséquent, d'après l'égalité précédente, dans $wu'v'$. Aucun ne divisant u' ou v', ils se trouvent dans w, qui est donc divisible par $\sqrt{v^2-u^2}$. En fesant $\alpha=l$ on prouve de même que w est divisible par $\sqrt{v^2-l^2u^2}$; comme le produit $\sqrt{v^2-u^2}\times\sqrt{v^2-l^2u^2}$ est de même degré que w, il en résulte que

$$w:\sqrt{(v^2-u^2)(v^2-l^2u^2)}=M'^{-1}.$$

$$\text{Or, }\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}=\frac{w}{\sqrt{(v^2-u^2)(v^2-l^2u^2)}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=$$
$$=\frac{1}{M'}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Pour déterminer M', fesons $x=0$ dans la valeur obtenue pour cette constante au moyen de l'égalité précédente. On aura, d'après le n° 38,

$$\frac{1}{M'}=\lim\frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-l^2y^2}}=\lim\frac{dy}{dx}=\lim\frac{y}{x}=\frac{1}{M}.$$

41. *Transformation simple.* Une transformation simple se rattache à cette transformation générale. Pour l'obtenir, il faut faire $p = n$, $q = 0$, $p' = 0$, $q' = 1$, $r = 1$. Alors,

$$K = MnL, \quad K'\sqrt{-1} = ML'\sqrt{-1}, \quad \omega = \frac{nK'\sqrt{-1} + K}{n} = K'\sqrt{-1} + \frac{K}{n}.$$

Abel a le premier indiqué la valeur de $\lambda_1\varepsilon$ dans cette hypothèse et en a déduit la transformation de Landen (1).

§ II. *Seconde transformation : q impair.*

42. Ce cas ressemble tellement au précédent que nous nous contenterons de donner les formules qui s'y rapportent. On trouve encore que *n doit être positif.*

$$R = \rho \qquad ML = \varphi\omega + gK + \eta K'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = \xi K'\sqrt{-1} - \xi' K, \quad ML'\sqrt{-1} = f'\omega + g'K + \eta' K'\sqrt{-1}$$

$$\lambda_1\varepsilon = -m\,\frac{\lambda\varepsilon\nu\varepsilon}{\mu\varepsilon}\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = -(-1)^{\frac{\xi+1}{2}}\,m\,k^{n-1}P\lambda(\varepsilon + 2T\omega)$$

$$\mu_1\varepsilon = \frac{m_1}{\mu\varepsilon}\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)}$$

$$\nu_1\varepsilon = \frac{m_2}{\mu\varepsilon}\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)}$$

$$\frac{\nu_1\varepsilon}{\mu_1\varepsilon} = \frac{m_2}{m_1}\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + \sigma\omega)} = \frac{m_2}{m_1}k^n\;P\lambda^2(\sigma\omega)P\lambda(\varepsilon + 2T\omega)$$

---

(1) Sur les transformations de ce paragraphe, voir l'Introduction historique, nº 12-14. La transformation du § suivant n'a pas encore été étudiée directement parce qu'on peut la déduire de la précédente.

$$m = -(-1)^{\frac{q'-1}{2}} \; k \; \mathrm{P}\frac{\lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m_1 = - \qquad k^2 \; \mathrm{P}\frac{\lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2(s\omega)}$$

$$m_2 = - \qquad \frac{1}{k^{n-1}} \mathrm{P}\frac{1}{\lambda^2(s\omega)\lambda^2(\sigma\omega)}$$

$$\mathrm{M} = (-1)^{\frac{q'-1}{2}} \frac{1}{k^{n-1}} \mathrm{P}\frac{1}{\lambda^2(s\omega)\lambda^2(\sigma\omega)}$$

$$l = (-1)^{\frac{p'}{2}} \frac{1}{k^n} \mathrm{P}\frac{1}{\lambda^4(\sigma\omega)}$$

$$\frac{l'}{l}\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{1}{\mu\omega} \mathrm{P}\frac{1 - k^2\lambda^2\omega\lambda^2(\sigma\omega)}{1 - k^2\lambda^2\omega\lambda^2(s\omega)}$$

On pourrait, comme dans les cas précédents, mettre ces formules sous plusieurs formes.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATIONS RATIONNELLES OU y S'ANNULE QUAND x DEVIENT INFINI (p impair, q' pair, n pair).

§ 1. *Première transformation : q pair.*

43. *Valeur de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ déterminées en supposant le problème possible.* On arrive, comme dans les cas précédents aux formules de la transformation. Dans les produits où entre λ^2, on peut remplacer $s\omega$ et $\sigma\omega$ par $s\omega + \mathrm{K}'\sqrt{-1}$ et $\sigma\omega + \mathrm{K}'\sqrt{-1}$. Voici ces formules :

$$\mathrm{R} = r \qquad \mathrm{ML} = f\omega + \gamma\mathrm{K} + h\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = \xi\mathrm{K}'\sqrt{-1} - z\mathrm{K} \qquad \mathrm{ML}'\sqrt{-1} = \varphi'\omega + g'\mathrm{K} + h'\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

$$\lambda(\varepsilon + 2n_1\omega) = \lambda\varepsilon, \quad \mu(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\mu\varepsilon, \quad \nu(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\nu\varepsilon.$$

$$\lambda_1 \varepsilon = m \lambda \varepsilon \quad P \frac{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (s\omega)}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (\sigma\omega)}$$

$$\mu_1 \varepsilon = m_1 \mu\varepsilon\nu\varepsilon \, P \frac{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (K + s\omega)}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (\sigma\omega)}$$

$$\nu_1 \varepsilon = m_2 \quad P \frac{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (K + \sigma\omega)}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (\sigma\omega)}$$

$$\frac{\mu_1 \varepsilon}{\lambda_1 \varepsilon} = \frac{m_1}{m} \frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda\varepsilon} P \frac{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (K + s\omega)}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (s\omega)}$$

$$1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \lambda_1 \varepsilon = - m_1 (1 - \lambda\varepsilon) [1 - (-1)^{\frac{p'}{2}} k\lambda\varepsilon] \, P \frac{[\lambda\varepsilon - \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2 (\sigma\omega) - \lambda^2 \varepsilon}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \lambda_1 \varepsilon = - m_1 (1 + \lambda\varepsilon) [1 + (-1)^{\frac{p'}{2}} k\lambda\varepsilon] \, P \frac{[\lambda\varepsilon + \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2 (\sigma\omega) - \lambda^2 \varepsilon}$$

$$\frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \lambda_1 \varepsilon}{\lambda_1 \varepsilon} = \frac{m_1}{m} \frac{(1 - \lambda\varepsilon) [1 - (-1)^{\frac{p'}{2}} k\lambda\varepsilon]}{\lambda\varepsilon} P \frac{[\lambda\varepsilon - \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2 (s\omega) - \lambda^2 \varepsilon}$$

$$\frac{1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \lambda_1 \varepsilon}{\lambda_1 \varepsilon} = \frac{m_1}{m} \frac{(1 + \lambda\varepsilon) [1 + (-1)^{\frac{p'}{2}} k\lambda\varepsilon]}{\lambda\varepsilon} P \frac{[\lambda\varepsilon + \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2 (s\omega) - \lambda^2 \varepsilon}$$

$$1 - (-1)^{\frac{p+r-1}{2}} l\lambda_1 \varepsilon = m_2 P \frac{[\lambda\varepsilon - \lambda(K + \sigma\omega)]^2}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (\sigma\omega)}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p+r-1}{2}} l\lambda_1 \varepsilon = m_2 P \frac{[\lambda\varepsilon + \lambda(K + \sigma\omega)]^2}{\lambda^2 \varepsilon - \lambda^2 (\sigma\omega)}$$

Plusieurs des expressions précédentes peuvent s'écrire au moyen des produits de la forme $P\mu(\varepsilon + 2T\omega)$, $P\mu[\varepsilon + (2T + 1)\omega]$. Mais, avant de donner les formules auxquelles on est ainsi conduit, nous chercherons la valeurs des produits analogues en λ et en ν, qui nous donneront des relations utiles. On a (I, 6, 15)

$$\lambda(\varepsilon' + n_1\omega) = \lambda(\varepsilon' \pm \xi K'\sqrt{-1} \mp zK) = (-1)^{\frac{z}{2} - 1} \frac{1}{k\lambda(-\varepsilon')} = (-1)^{\frac{p'}{2} - 1} \frac{1}{k\lambda(-\varepsilon')}$$

En fesant $\varepsilon' = -s\omega - \varepsilon$, $\varepsilon' = -\sigma\omega - \varepsilon$, puis, $\varepsilon = 0$, et $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$, il vient

$$P\lambda(\varepsilon + s\omega)\lambda(s\omega - \varepsilon) = (-1)^{\left(\frac{p'}{2}-1\right)\left(\frac{n_1}{2}-1\right)} \frac{1}{k^{\frac{n_1}{2}-1}} = m^3$$

$$P\lambda(\varepsilon + \sigma\omega)\lambda(\sigma\omega - \varepsilon) = (-1)^{\left(\frac{p'}{2}-1\right)\frac{n_1}{2}} \quad \frac{1}{k^{\frac{n_1}{2}}} \quad = (-1)^{\frac{p'}{2}-1}\frac{m^3}{k}$$

$$P\,\lambda^2(s\omega) = \qquad m_3, \quad P\,\lambda^2(\sigma\omega) = (-1)^{\frac{p'}{2}-1}\frac{m_3}{k}$$

$$P\,\frac{\mu^2(s\omega)}{\nu^2(s\omega)} = (-1)^{\frac{n_1}{2}-1} m_3, \quad P\,\frac{\mu^2(\sigma\omega)}{\nu^2(\sigma\omega)} = (-1)^{\frac{p'+n_1}{2}-1}\frac{m_3}{k}$$

On tire encore des mêmes formules

$$P\lambda(\varepsilon + 2T\omega) = (-1)^{\frac{p'}{2}\left(\frac{n_1}{2}-1\right)}\frac{1}{k^{\frac{n_1}{2}-1}} \quad P\lambda\,[\varepsilon + (2T+1)\omega] = (-1)^{\frac{p'n_1}{2}}\frac{1}{k^{\frac{n_1}{2}}}$$

On trouve ensuite, en se servant de quelques-unes des formules précédentes et de la relation

$$P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + K'\sqrt{-1} + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)},$$

$$P\,\nu(\varepsilon + 2T\omega) \qquad = (-1)^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)\left(\frac{p'}{2}+1\right)} P\,\mu(\varepsilon + 2T\omega)$$

$$P\,\nu[\varepsilon + (2T+1)\omega] = (-1)^{\frac{n_1}{2}\left(\frac{p'}{2}+1\right)} \quad P\,\mu[\varepsilon + (2T+1)\omega]$$

Il résulte de là que si $\mu_1\varepsilon : \lambda_1\varepsilon$ et $\nu_1\varepsilon$ peuvent s'exprimer au moyen des produits en μ, ils peuvent aussi s'exprimer au moyen des produits en ν, mais non au moyen de ceux en λ. Ces fonctions peuvent d'ailleurs s'exprimer au moyen des premiers produits, car

$$\frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = \frac{m_1}{m}\,\frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\,P\,\frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K'\sqrt{-1} + s\omega)} = \frac{m_1}{m}\,k^{n_1-2}\,P\,\frac{\lambda^2(s\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$\times\,\frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda\varepsilon}\,P\,\mu(s\omega + \varepsilon)\,\mu(s\omega - \varepsilon).$$

Or, on trouve d'après une formule de ce numéro et (I, 16)

$$\mu(s\omega - \varepsilon) = -\mu[\varepsilon + (2n_1 - s)\omega] \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\,\frac{\nu\varepsilon}{\lambda\varepsilon} = (-1)^{\frac{z+\xi\pm 1}{2}}\, k\mu(\varepsilon + n_1\omega)$$

le signe supérieur correspondant au cas où n est positif, le signe inférieur au cas contraire. On tire de ces formules, après quelques transformations :

$$\sqrt{-1}\,\frac{\mu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{z+\xi\pm 1}{2}}\,\frac{m_1 k}{m}\,\mathrm{P}\,\frac{\mu(\varepsilon + 2\mathrm{T}\omega)}{\mu^2(s\omega)}.$$

De même $\qquad \nu_1\varepsilon = \qquad m_2\,\mathrm{P}\,\dfrac{\mu[\varepsilon + (2\mathrm{T}+1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}.$

On peut encore mettre sous une forme analogue les formules qui donnent $(1 \pm \lambda_1\varepsilon) : \lambda_1\varepsilon$, et $1 \pm l\lambda_1\varepsilon$. Voici les résultats auxquels on est conduit :

$$\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{p'+q'}{2}}\,\frac{m_1}{m}\,k\,\mathrm{P}\,\frac{[1-\lambda(\varepsilon+2\mathrm{T}\omega)]}{\mu^2(s\omega)}$$

$$\frac{1+(-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda_1\varepsilon}{-\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{p'+q'}{2}}\,\frac{m_1}{m}\,k\,\mathrm{P}\,\frac{[1+\lambda(\varepsilon+2\mathrm{T}\omega)]}{\mu^2(s\omega)}$$

$$1-(-1)^{\frac{p+r-1}{2}}\,l\lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{q'}{2}}\quad m_2\quad \mathrm{P}\,\frac{1-\lambda[\varepsilon+(2\mathrm{T}+1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}$$

$$1+(-1)^{\frac{p+r-1}{2}}\,l\lambda_1\varepsilon = (-1)^{\frac{q'}{2}}\quad m_2\quad \mathrm{P}\,\frac{1+\lambda[\varepsilon+(2\mathrm{T}+1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}$$

44. *Détermination des constantes.* On a par le n° 25 (C, G, II)

$$\mathrm{M}mk = (-1)^{\frac{p'}{2}} \qquad m_1 = -(-1)^{\frac{p'+q'}{2}}\,\frac{1}{k} \qquad m^2 = (-1)^{\frac{q'}{2}}$$

et, en fesant $\varepsilon = \mathrm{K}$ dans $\lambda_1\varepsilon$ et $\nu_1\varepsilon$

$$m = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \qquad \mathrm{P}\,\frac{\mu^2(\sigma\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

d'où, $\qquad \mathrm{M} = (-1)^{\frac{p+p'-1}{2}}\,\dfrac{1}{k}\,\mathrm{P}\,\dfrac{\mu^2(s\omega)}{\mu^2(\sigma\omega)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \mathrm{P}\,\dfrac{\nu^2(s\omega)}{\nu^2(\sigma\omega)}$

et $\qquad l' = (-1)^{\frac{q+q'}{2}} \qquad \mathrm{P}\,\dfrac{\mu^2(\sigma\omega)}{\mu^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+\sigma\omega)} = (-1)^{\frac{q}{2}}\,\dfrac{1}{k'^{n_1}}\,\mathrm{P}\,\nu^4(\sigma\omega).$

Pour obtenir l on fait $\varepsilon = K + \omega$ dans $\lambda_1\varepsilon$, ce qui donne la valeur suivante que l'on peut transformer de diverses manières :

$$\frac{1}{l} = (-1)^{\frac{p+q-1}{2}} m\lambda(K+\omega)\,P\frac{\lambda^2(K+\omega)-\lambda^2(s\omega)}{\lambda^2(K+\omega)-\lambda^2(\sigma\omega)}$$

Enfin, en fesant $s = \omega$ dans $\mu_1\varepsilon : \lambda_1\varepsilon$, et $\varepsilon = 0$ dans $\nu_1\varepsilon$, mis sous forme de produit de facteurs de la forme $\mu(\varepsilon + 2T\omega)$ etc., il vient, après quelques réductions,

$$1 = (-1)^{\frac{s+\frac{\xi}{q}\pm 1+p'+p+1}{2}} = (-1)^{\frac{p'-q'r+p\pm 1-qr+p'+p+1}{2}}$$

égalité qui n'est vraie que si l'on prend le signe supérieur de ± 1 ; donc *n doit être positif.*

45. *Vérification de la solution.* Nous déduirons la valeur des diverses fonctions y, $\sqrt{1-y^2}$, etc. de l'égalité

$$1-(-1)^{\frac{p+r-1}{2}}D_1\varepsilon = 1-(-1)^{\frac{p+r-1}{2}}ly = P\,\frac{1-\lambda[\varepsilon+(2T+1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)} = P\,\frac{[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+\sigma\omega)]^2}{\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(\sigma\omega)}$$

Il résulte immédiatement de cette égalité que $1 \pm ly$, et $\sqrt{1-l^2y^2}$ ont la forme qui leur a été assignée ; ensuite que y ne change pas quand ε augmente de 2ω, enfin que y et $1 \pm y$ s'expriment rationnellement en $\lambda\varepsilon$.

Nous supposerons $y = 0$, pour $x = 0$, ou $\varepsilon = 0$. Il en résulte que le numérateur de y contient les $(n-1)$ facteurs de

$$\lambda\varepsilon P[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)]$$

Si on suppose que $y = 0$ pour $x = \infty$, comme le dénominateur de $1 \pm ly$ et de y contient n facteurs du premier degré en x, il en résulte que y n'a pas d'autres facteurs au numérateur que ceux que nous venons d'indiquer.

Soit $y = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ pour $\varepsilon = K$; on trouvera encore la même valeur pour $\varepsilon = K + s\omega$. Tous les facteurs trouvés précédemment au numérateur de $1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\lambda_1\varepsilon$ sont donc dans celui de $1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}y$. Il reste à prouver que leur degré de multiplicité est le même et qu'il n'y a pas d'autres facteurs. Pour cela désignons par $1 + jx$ l'un des deux facteurs $1 - \lambda\varepsilon$, $1-(-1)^{\frac{p'}{2}}k\lambda\varepsilon$; la limite de $[1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}y] : [1 + jx]$, quand $1 + jx = 0$

sera finie ou nulle, et égale à un facteur constant près à celle de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varepsilon} : \mu\varepsilon\nu\varepsilon$$

Or $\mu\varepsilon\nu\varepsilon = 0$ en même temps que $1 + jx$; donc $\frac{dy}{d\varepsilon} = 0$, quand $1 + jx = 0$. Mais $\frac{dy}{d\varepsilon}$ ne change pas quand ε augmente de 2ω. Par conséquent, si $\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1$ est un des facteurs différents de $1 + jx$ trouvés au numérateur, pour $\varepsilon = \varepsilon_1$, on aura

$$\lim \frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}} y}{\lambda\varepsilon - \varepsilon\lambda_1} = -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \lim \frac{\frac{dy}{d\varepsilon}}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon} = 0$$

Chacun des facteurs $\lambda\varepsilon - \lambda\varepsilon_1$ est donc au moins un facteur double. On ne peut pas supposer un degré de multiplicité supérieur à ces facteurs, ni qu'il y ait d'autres facteurs, ni que les deux facteurs $1 + jx$ soient à une puissance supérieure à la première, sans que l'on ait $1-(-1)^{\frac{p-1}{2}} y = \infty$ pour $x = \infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse $y = 0$ pour $x = \infty$. Ainsi $1 \pm y$, $\sqrt{1-y^2}$ ont la forme assignée précédemment. D'ailleurs, on cherche les constantes comme dans le cas où l'on opère à priori.

La vérification de la solution par substitution dans l'équation différentielle peut se faire très simplement par la méthode d'Abel donnée dans le second chapitre(1).

16. *Transformation simple.* Si on fait $p = 1$, $q = 0$, $p' = 0$, $q' = n$, $r = 1$, on trouve la valeur suivante de ω, qui conduit à la dernière transformation simple qui ait été étudiée.

$$\omega = \frac{K'\sqrt{-1} + nK}{n} = K + \frac{K'\sqrt{-1}}{n}$$

---

(1) Voir sur cette transformation et celle du paragraphe suivant l'Introduction historique, nos 13 et 14.

§ II. *Seconde transformation : q impair.*

47. Voici les formules qui se rapportent à cette transformation; *n est encore un nombre positif.*

$$R = r \qquad ML = \varphi\omega + \gamma K + hK'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = \xi K'\sqrt{-1} - zK \qquad ML'\sqrt{-1} = \varphi'\omega + g'K + h'K'\sqrt{-1}$$

$$\lambda(\varepsilon + 2n\omega) = \lambda\varepsilon, \quad \mu(\varepsilon + 2n\omega) = -\mu\varepsilon, \quad \nu(\varepsilon + 2n\omega) = -\nu\varepsilon$$

$$\lambda_1\varepsilon = m\lambda\varepsilon P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}$$

$$\mu_1\varepsilon = m_1 P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)} = m_1 P \frac{\mu[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}$$

$$\nu_1\varepsilon = m_2\mu\varepsilon\nu\varepsilon P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}$$

$$\sqrt{-1}\,\frac{\nu_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = \frac{m_2}{m}\frac{\mu\varepsilon\nu\varepsilon}{\lambda\varepsilon} P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)} = (-1)^{\frac{z+\xi+1}{2}} \frac{m_2 k}{m} P \frac{\mu(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$1 - (-1)^{\frac{p+r-1}{2}} \lambda_1\varepsilon = m_1 P \frac{[\lambda\varepsilon - \lambda(K + \sigma\omega)]^2}{\lambda^2(\sigma\omega) - \lambda^2\varepsilon} = (-1)^{\frac{n}{2}} m_1 P \frac{1 - \lambda[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p+r-1}{2}} \lambda_1\varepsilon = m_1 P \frac{[\lambda\varepsilon + \lambda(K + \sigma\omega)]^2}{\lambda^2(\sigma\omega) - \lambda^2\varepsilon} = (-1)^{\frac{n}{2}} m_1 P \frac{1 + \lambda[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)}$$

$$1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} l\lambda_1\varepsilon = -m_2(1 - \lambda\varepsilon)[1 - (-1)^{\frac{z}{2}} k\lambda\varepsilon] P \frac{[\lambda\varepsilon - \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2(\sigma\omega) - \lambda^2\varepsilon}$$

$$1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} l\lambda_1\varepsilon = -m_2(1 - \lambda\varepsilon)[1 + (-1)^{\frac{z}{2}} k\lambda\varepsilon] P \frac{[\lambda\varepsilon + \lambda(K + s\omega)]^2}{\lambda^2(\sigma\omega) - \lambda^2\varepsilon}$$

$$\frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} l\lambda_1\varepsilon}{\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{z+n}{2}} \frac{m_2 k}{m} P \frac{1 - \lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

$$\frac{1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} l\lambda_1\varepsilon}{-\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{z+n}{2}} \frac{m_2 k}{m} P \frac{1 + \lambda(\varepsilon + 2T\omega)}{\mu^2(s\omega)}$$

En substituant dans $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$, les valeurs 0, K, $K + K'\sqrt{-1}$ et $K'\sqrt{-1}$, on ne trouve que les cinq relations suivantes qui suffisent pour prouver

que n est positif, mais qui donnent l, l', m, M avec le double signe, à cause de la relation $1 - l^2 = l'^2$ que l'on est forcé d'employer :

$$m_1 = (-1)^{\frac{p'+q'}{2}} \quad m_2 = -(-1)^{\frac{q'}{2}} \frac{1}{k}, \quad \mathrm{M}mk = -(-1)^{\frac{p'}{2}}$$

$$ml = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{P} \frac{\mu^2(\sigma\omega)}{\mu^2(s\omega)} \qquad l'\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{p+q}{2}} \left(\frac{k'}{k}\right)^n l\mathrm{P} \frac{1}{\mu^4(\sigma\omega)}$$

Si on voulait trouver l directement, il suffirait de faire $\varepsilon = \mathrm{K}$ dans $1 \pm \lambda\varepsilon$, et le signe des constantes serait complétement déterminé.

CHAPITRE V.

TRANSFORMATION IRRATIONNELLE OU y S'ANNULE QUAND x DEVIENT INFINI
(p, q' pairs, q impair; n pair).

48. *Formules de la transformation supposée possible.* Dans le cas actuel on a, d'après le nº 29 :

$$\mathrm{R} = \rho \qquad \mathrm{ML} = \varphi\omega + \gamma\mathrm{K} + h\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

$$n\omega = \xi\mathrm{K}'\sqrt{-1} - z\mathrm{KM}, \qquad \mathrm{L}'\sqrt{-1} = f'\omega + \gamma\mathrm{K} + h'\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

$$\lambda(\varepsilon + 2n_1\omega) = \lambda\varepsilon, \quad \mu(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\mu\varepsilon, \quad \nu(\varepsilon + 2n_1\omega) = -\nu\varepsilon$$

On trouve, en raisonnant comme dans les cas précédents :

$$\lambda\varepsilon = mk^2 \frac{\lambda\varepsilon}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K} + s\omega)}$$

$$\mu\varepsilon = \frac{m_1}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K} + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K} + s\omega)}$$

$$\nu\varepsilon = \frac{m_2}{\mu\varepsilon\nu\varepsilon} \mathrm{P} \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\mathrm{K} + s\omega)}$$

Au moyen de (I, 26), on arrive encore aux formules suivantes, où le signe supérieur de $\xi \pm 1$ se rapporte au cas où n est positif, le signe inférieur au cas contraire.

$$\frac{\sqrt{-1}}{\lambda_1\varepsilon} = (-1)^{\frac{\xi \pm 1 + z}{2}} \frac{1}{mk} \mathrm{P} \frac{\mu(\varepsilon + 2\mathrm{T}\omega)}{\mu^2(s\omega)} = (-1)^{\frac{\xi \pm 1 + z}{2}} \frac{1}{mk^2} \mathrm{P} \frac{\nu(\varepsilon + 2\mathrm{T}\omega)}{\nu^2(s\omega)}$$

$$\frac{\mu_1\varepsilon}{\nu_1\varepsilon} = \frac{m_1}{m_2} \mathrm{P} \frac{\mu[\varepsilon + (2\mathrm{T} + 1)\omega]}{\mu^2(\sigma\omega)} = \frac{m_1}{m_2} \mathrm{P} \frac{\nu[\varepsilon + (2\mathrm{T} + 1)\omega]}{\nu^2(\sigma\omega)}$$

Pour trouver les constantes, fesons $\varepsilon = K'\sqrt{-1}$ ou $\varepsilon = 0$, il viendra : (nº 25, G, H, D ou I)

$$m_1 = (-1)^{\frac{p'+q'}{2}-1} k, \quad m_2 = (-1)^{\frac{q'}{2}-1} k, \quad Mmk^2 = (-1)^{\frac{p'}{2}-1}$$

Soit ensuite $\varepsilon = K$ dans $\lambda_1\varepsilon\mu\varepsilon$, on trouvera :

$$M = (-1)^{\frac{p+p'}{2}} ml \frac{k^n}{k'^n} P\mu^4(s\omega)$$

La même substitution dans $\nu_1\varepsilon\mu\varepsilon$ conduit à

$$M = (-1)^{\frac{q+1+p'+q'}{2}} \sqrt{-1}\, \frac{k^{n_1-1}}{k'^{n_1}} P\mu^2(s\omega)\mu^2(\sigma\omega)$$

D'où

$$m = (-1)^{\frac{q+1+q'}{2}} \sqrt{-1}\, \frac{k'^{n_1}}{k^{n_1+1}} P \frac{1}{\mu^2(s\omega)\mu^2(\sigma\omega)}$$

$$l = (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{k^{n_1}}{k'^{n_1}} P\mu^4(\sigma\omega)$$

On trouverait une valeur peu élégante de l' en fesant $\varepsilon = \omega$ dans $\mu_1\varepsilon$. On prouve que *n est positif* en fesant $\varepsilon = \omega$ dans $\sqrt{-1} : \lambda_1\varepsilon$, et $\varepsilon = 0$ dans $\mu_1\varepsilon : \nu_1\varepsilon$. On arrive, en effet, de cette manière à l'égalité :

$$1 = (-1)^{\frac{\xi \pm 1 + z + \rho + 1 + p' + q + 1 + q' + p}{2}}$$

$$\xi + 1 + z + \rho + 1 + p' + q + 1 + q' + p = p - q\rho + 1 + p' - q'\rho + \rho + 1 + p' + q$$
$$+ 1 + q' + p = 2p + (\rho - 1)(1 - q) + 4 + 2p' - q'(\rho - 1) = 4a$$

On doit donc prendre dans $\xi \pm 1$ le signe supérieur, qui correspond à n positif.

49. *Vérification de la solution.* Nous déduirons dans le cas actuel la valeur de $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$, de $\mu_1\varepsilon : \nu_1\varepsilon$ en supposant que $y = 0$ pour $x = 0$ et $x = \infty$ et $y = \infty$ pour $\varepsilon = K$. Posons

$$u^2 = \frac{1 - y^2}{1 - l^2y^2}; \text{ on aura } y^2 = \frac{1 - u^2}{1 - l^2u^2}; \quad \frac{dy^2}{d\varepsilon} = -\frac{2l'^2u}{(1 - l^2u^2)^2}\frac{du}{d\varepsilon}; \quad \frac{dy^{-2}}{d\varepsilon} = \frac{2l'^2u}{(1 - u^2)^2}\frac{du}{d\varepsilon}$$

$$u = \frac{m_1}{m_2} P \frac{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(K + \sigma\omega)}{\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(\sigma\omega)} = \frac{m_1}{m_2} P \frac{\nu[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\nu^2(\sigma\omega)}; \quad \frac{du}{d\varepsilon} = u\, S \frac{\nu'[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\nu[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}.$$

D'après cette valeur de u, y^2 sera une fonction rationnelle en x. Son dénominateur sera au plus de degré n en x^2 et le numérateur de degré $n-1$, puisque pour $x=\infty$, il faut que $y=0$. Les fonctions y^2 et y^{-2}, ainsi que leurs dérivées par rapport à ε ne changent pas de valeur quand ε augmente de 2ω.

Nous avons supposé que $y=\infty$ pour $\varepsilon=K$, et par suite pour $K+2a\omega$; il est facile de conclure de là que tous les facteurs du produit

$$(1-\lambda^2\varepsilon)(1-k^2\lambda^2\varepsilon)\,P[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)]$$

se trouvent au dénominateur de y^2. Désignons par $1+jx$ l'un des facteurs $1\pm\lambda\varepsilon$, $1\pm k\lambda\varepsilon$. La limite de $(1+jx)y^2$ pour $1+jx=0$ sera finie ou infinie, selon que $1+jx$ est une ou plusieurs fois facteur dans le dénominateur de y^2; or cette limite ne diffère que par un facteur constant de celle de

$$\frac{dx}{d\varepsilon}:\frac{dy^{-2}}{d\varepsilon}=\mu\varepsilon\nu\varepsilon:\frac{dy^{-2}}{d\varepsilon}$$

dont le numérateur $\mu\varepsilon\nu\varepsilon$ est égal à zéro. On doit donc avoir, quand $1+jx=0$ et par conséquent quand $\varepsilon=K+2a\omega$:

$$\frac{dy^{-2}}{d\varepsilon}=0 \qquad \text{et} \qquad S\frac{\nu'[\varepsilon+(2T+1)\omega]}{\nu[\varepsilon+(2T+1)\omega]}=0.$$

La limite de $y^2[\lambda\varepsilon\pm\lambda(K+s\omega)]$, pour $\varepsilon=\pm(K+s\omega)$ sera égale, à un facteur constant près, à celle de

$$\mu\varepsilon\nu\varepsilon:\frac{dy^{-2}}{d\varepsilon}$$

et est par conséquent infinie. Les facteurs de la forme $\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)$ sont donc au moins des facteurs doubles. Le produit

$$(1-\lambda^2\varepsilon)(1-k^2\lambda^2\varepsilon)\,P[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(K+s\omega)]^2$$

étant de degré n en $\lambda^2\varepsilon$ est, d'après ce qui précède, égal à un facteur constant près, au dénominateur de y^2.

Puisque $y=0$ pour $\varepsilon=0$, les facteurs du produit

$$\lambda\varepsilon\,P[\lambda^2\varepsilon-\lambda^2(s\omega)]$$

se trouvent tous au numérateur de y^2. Ils s'y trouvent tous à la seconde puissance. En effet la limite de $y^2:[\lambda\varepsilon-\lambda(2a\omega)]$ pour $\varepsilon=2a\omega$ est égale à celle de

$$\frac{dy^2}{d\varepsilon}:\mu\varepsilon\nu\varepsilon.$$

Or $\frac{dy^2}{d\varepsilon}$ est nul. En effet, nous avons démontré ci-dessus que

$$S \frac{\nu'[K + (2T + 1)\omega]}{\nu[K + (2T + 1)\omega]} = 0.$$

Cette égalité se transforme en la suivante par les formules (I, 15, 20, 21)

$$S \frac{\nu'(2T + 1)\omega}{\nu(2T + 1)\omega} = 0.$$

Par conséquent, pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 2a\omega$,

$$S \frac{\nu'[\varepsilon + (2T + 1)\omega]}{\nu[\varepsilon + (2T + 1)\omega]} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy^2}{d\varepsilon} = 0,$$

et les facteurs considérés sont à la seconde puissance au moins au numérateur de y^2(1). Le produit

$$\lambda^2\varepsilon\, P[\lambda^2\varepsilon - \lambda^2(s\omega)]^2$$

étant de degré $n - 1$ en $\lambda^2\varepsilon$ est égal à un facteur constant près au numérateur de y.

Soit maintenant

$$y^2 = \frac{v}{w} \qquad \text{et par suite} \qquad u^2 = \frac{1 - y^2}{1 - l^2y^2} = \frac{w^2 - v^3}{w^2 - l^2v^2}$$

Cette dernière fraction rationnelle étant irréductible, son numérateur $w^2 - v^2$ et son dénominateur $w^2 - l^2v^2$ sont respectivement égaux à un facteur constant près au numérateur et au dénominateur de u^2. On conclut de là que $\mu_1\varepsilon$ et $\nu_1\varepsilon$ ont la forme qui a été trouvée dans le n° précédent.

La vérification de la solution par substitution des valeurs trouvées pour $\lambda_1\varepsilon$, $\mu_1\varepsilon$, $\nu_1\varepsilon$ dans l'équation différentielle se fait absolument comme dans le chapitre troisième, par la méthode de Jacobi.

50. *Transformation simple.* — Soit $p = 0$, $q = -1$, $p' = n$, $q' = 0$, $r = 1$. On a

$$\omega = \frac{K'\sqrt{-1}}{n} + K$$

$$ML = -K'\sqrt{-1} \qquad ML'\sqrt{-1} = nK$$

ce qui conduit à une transformation simple qui n'a pas été remarquée. Cela

(1) Le mode de démonstration employé ici pour prouver que $\frac{dy^2}{d\varepsilon} = 0$ pour $\varepsilon = 0$ est applicable dans les transformations précédentes ; mais la démonstration donnée dans les chapitres II, III, IV, n'est plus applicable ici.

s'explique aisément, parce que dans cette transformation, k ou l est imaginaire, et l'on a étudié surtout les transformations se rapportant à des modules réels.

51. *Remarque générale.* On pourrait étudier directement les transformations générales par la théorie des fonctions doublement périodiques. On devrait procéder à peu près comme dans ce mémoire, pour trouver les facteurs qui entrent dans les formules de la transformation, pour déterminer les constantes et démontrer que n est positif. Mais la vérification de la solution se ferait tout autrement : on devrait prouver que les valeurs trouvées ont les mêmes périodes que les valeurs cherchées, ce qui serait plus ou moins simple suivant les cas.

Dans la théorie des fonctions θ, on trouve immédiatement que n doit être positif, mais on suit une marche assez longue pour arriver aux formules de la transformation. Seulement cette méthode a l'avantage de faire connaître de nombreuses propriétés des fonctions θ transformées et, comme on le sait, ces fonctions ont dans l'analyse une importance non moins considérable que les fonctions elliptiques elles-mêmes.

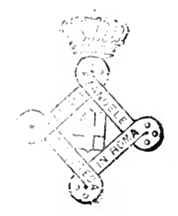


TABLE DES MATIÈRES.

Avis au lecteur. — Ce mémoire ayant été imprimé en *trois semaines*, il s'y est glissé quelques fautes dont nous signalons les principales. Remplacez, p. 6, l. 29 et p. 77, l. 13, *elle* par *elles ;* p. 8, l. 9, *fractions* par *fonctions ;* p. 10, l. 23, *paragraphe* par *chapitre ;* p. 15, l. 16, *devination* par *div. ;* p. 43, l. 20, *finies* par *finis ;* p. 68, l. 36, *amener* par *ramener ;* p. 75 et *passim*, *rationel* par *rationnel*. Ajoutez le mot *cas*, p. 69, l. 32.

Dans les formules, remplacez, p. 39, form. 17, α par λ ; p. 43, l. 9, D_1 par D ; p. 87, l. 1, $\nu\varepsilon$ par $\nu_1\varepsilon$; ajoutez une parenthèse p. 89, l. 6.

